

Έλεγχος Υποθέσεων

Στον έλεγχο υποθέσεων υπάρχουν:

- Η μηδενική υπόθεση H_0
- Η εναλλακτική υπόθεση H_1

Η εναλλακτική υπόθεση είναι το αντίθετο της μηδενικής υπόθεσης.

Επειδή υποστηρίζουν αντίθετες υποθέσεις, μόνο 1 από τις 2 θα είναι σωστή. Η απόρριψη της μιας υπόθεσης σημαίνει αποδοχή της άλλης.

Παράδειγμα 1:

Μηδενική υπόθεση: $H_0: \mu=100$

Εναλλακτική υπόθεση: $H_1: \mu \neq 100$

Παράδειγμα 2:

Μηδενική υπόθεση: $H_0: \mu > 100$

Εναλλακτική υπόθεση: $H_1: \mu \leq 100$



Έλεγχος Υποθέσεων

Προφανώς, για να ελεγχθεί μια υπόθεση με απόλυτη ακρίβεια, πρέπει να ελεγχθεί όλος ο πληθυσμός.

Αυτό όμως είναι δύσκολο, οπότε επιλέγεται ένα ικανοποιητικό τυχαίο δείγμα, και εξάγονται συμπεράσματα με βάση αυτό.

Στον στατιστικό έλεγχο υποθέσεων υπάρχει η δυνατότητα σφάλματος:

- **Τύπου I**, όπου κάνω απόρριψη μιας σωστής μηδενικής υπόθεσης
- **Τύπου II**, όπου κάνω αποδοχή μιας λανθασμένης μηδενικής υπόθεσης



Έλεγχος Υποθέσεων

Σφάλμα τύπου I: Απορρίπτω H_0 όταν H_0 αληθής, με πιθανότητα = α

Σφάλμα τύπου II: Δέχομαι H_0 όταν H_a αληθής, με πιθανότητα = β

	Στατιστικός	Δέχομαι H_0	Απορρίπτω H_0
Φύση			
H_0 αληθής		Ορθή απόφαση Πιθανότητα = $1-\alpha$	Σφάλμα τύπου I Πιθανότητα = α
H_a αληθής		Σφάλμα τύπου II Πιθανότητα = β	Ορθή απόφαση Πιθανότητα = $1-\beta$



Τιμή p και επίπεδο σημαντικότητας α

Όταν σε έναν έλεγχο υποθέσεων δίνεται η μηδενική υπόθεση και οι δειγματικές ενδείξεις από δείγμα μεγέθους n ,

η τιμή p είναι η πιθανότητα να προκύψει μια δειγματική ένδειξη η οποία είναι ίση ή περισσότερο απομακρυσμένη από τη μηδενική υπόθεση όταν η μηδενική υπόθεση είναι πραγματικά σωστή.

Κανόνας: Όταν η τιμή p είναι μικρότερη από το επίπεδο σημαντικότητας α , τότε η μηδενική υπόθεση H_0 απορρίπτεται.

Το α είναι η μέγιστη τιμή p για την οποία απορρίπτεται η H_0 , είναι η μέγιστη πιθανότητα να κάνουμε σφάλμα τύπου I.



Τιμή ρ και επίπεδο σημαντικότητας α

Η τιμή του α επηρεάζει

- τόσο την πιθανότητα σφάλματος τύπου I
 - όσο αυξάνεται το α , τόσο αυξάνεται η πιθανότητα σφάλματος τύπου I,
- όσο και την πιθανότητα σφάλματος τύπου II
 - όσο αυξάνεται η τιμή του α , μειώνεται η πιθανότητα σφάλματος τύπου II

Η τιμή του α , επιλέγεται ανάλογα με τις επιπτώσεις/κόστος του κάθε σφάλματος.



Τιμή p και επίπεδο σημαντικότητας α

Αν το κάνουμε σφάλμα τύπου II (δηλαδή αποδοχή λανθασμένης υπόθεσης) είναι πολύ σημαντικό, π.χ. γιατί θα προκαλέσει δυσφήμιση στην εταιρία μου να παραχθούν προβληματικά προϊόντα, τότε επιλέγω μεγαλύτερο α π.χ. στο 10%, άρα 90% διάστημα εμπιστοσύνης.

Αν όμως ένα σφάλμα τύπου II δεν έχει ιδιαίτερο κόστος, ενώ ένα σφάλμα τύπου I οδηγεί στην απόρριψη μιας καλής παραγωγής προϊόντων, τότε επιλέγω μικρότερο α π.χ. στο 1%, άρα 99% διάστημα εμπιστοσύνης.



Τιμή p και επίπεδο σημαντικότητας α

Στο σφάλμα τύπου I, σημασία έχει η τιμή του α , ενώ

Στο σφάλμα τύπου II, σημασία έχει η τιμή του β , το οποίο εκφράζει την πιθανότητα σφάλματος τύπου II

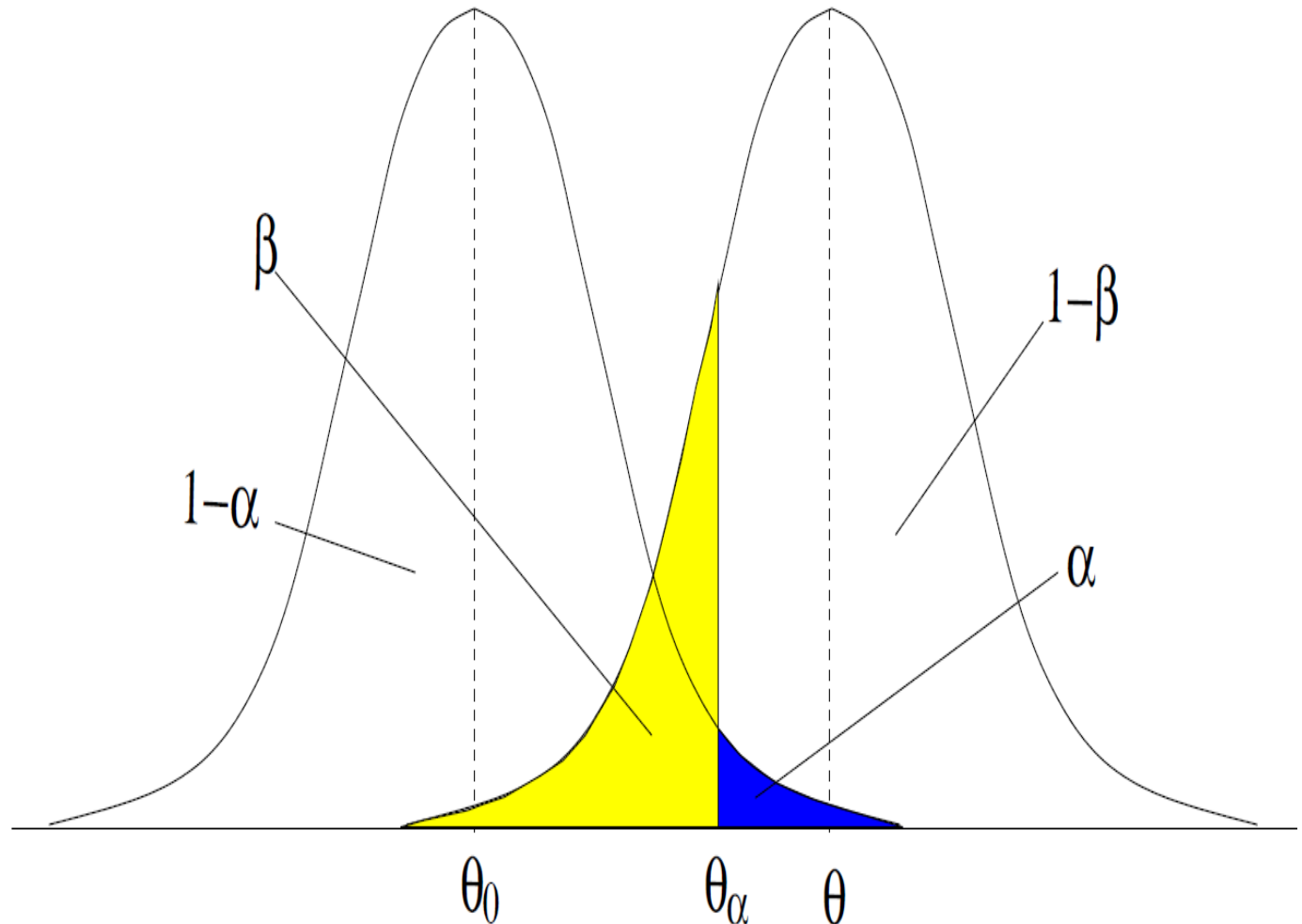
Η ισχύς ενός ελέγχου είναι το συμπληρωματικό του β , ήτοι $1-\beta$.

Η ισχύς ενός ελέγχου είναι η πιθανότητα ότι μια λανθασμένη μηδενική υπόθεση θα εντοπιστεί από τον έλεγχο.



Σχέσεις α και β για διάφορες τιμές του μεγέθους του δείγματος n

α : Πιθανότητα Σφάλματος Τύπου I, β : Πιθανότητα Σφάλματος Τύπου II



θ_0 : Σωστή μηδενική υπόθεση, θ : Λανθασμένη μηδενική υπόθεση



Έλεγχος Υποθέσεων

Ο έλεγχος υποθέσεων μπορεί να είναι:

- Δίπλευρος
- Μονόπλευρος
 - Προς τα αριστερά
 - Προς τα δεξιά

Παραδείγματα:

Δίπλευρος έλεγχος.

$H_0: \mu = 1000$, $H_1: \mu \neq 1000$

Μονόπλευρος προς τα αριστερά

$H_0: \mu \geq 1000$, $H_1: \mu < 1000$

Μονόπλευρος προς τα δεξιά

$H_0: \mu \leq 1000$, $H_1: \mu > 1000$



Έλεγχος Υποθέσεων

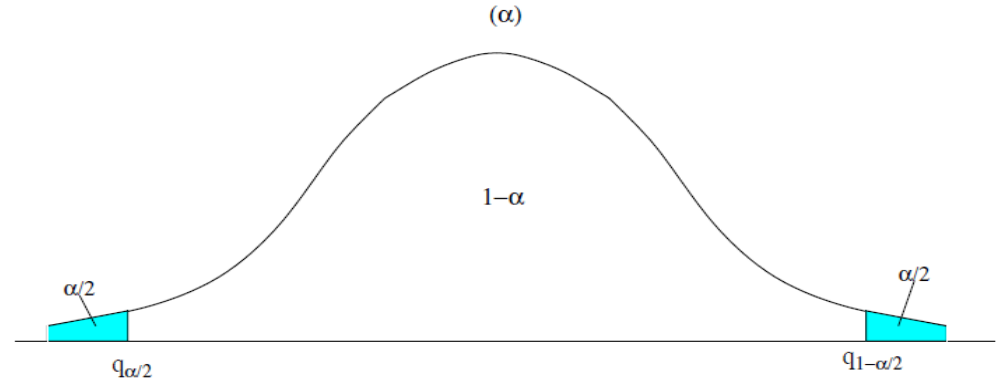
Γενική μορφή του ελέγχου υποθέσεων:

- **Διατύπωση των υποθέσεων H_0 και H_1**
- Επιλογή του **επιπέδου σημαντικότητας α** και της κατάλληλης στατιστικής ελέγχου (π.χ. Z , t , χ^2)
- Προσδιορισμός του κανόνα αποφάσεων (π.χ. δίπλευρος έλεγχος) και συνεπώς των **περιοχών απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης** με βάση την τιμή του α και την μορφή της H_1
- Υπολογισμός της **τιμής της στατιστικής συνάρτησης ελέγχου** (στατιστικού μέτρου) από το δείγμα.
 - Αν η τιμή αυτή βρίσκεται στην περιοχή απορρίψεως, η H_0 απορρίπτεται.

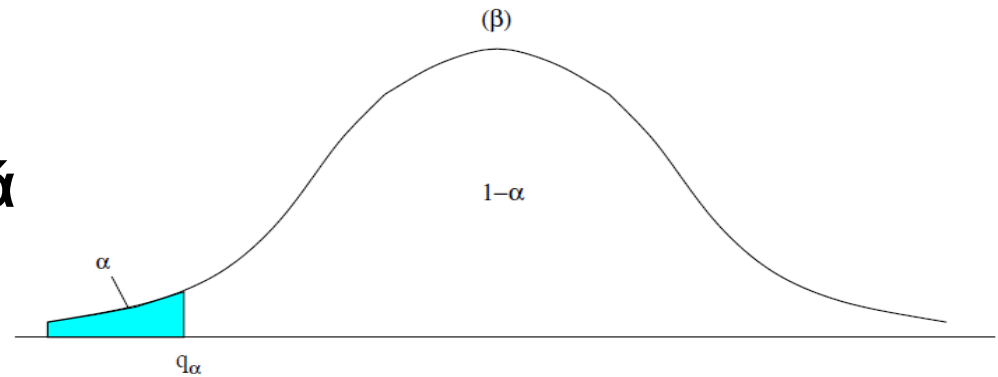


Έλεγχος Υποθέσεων

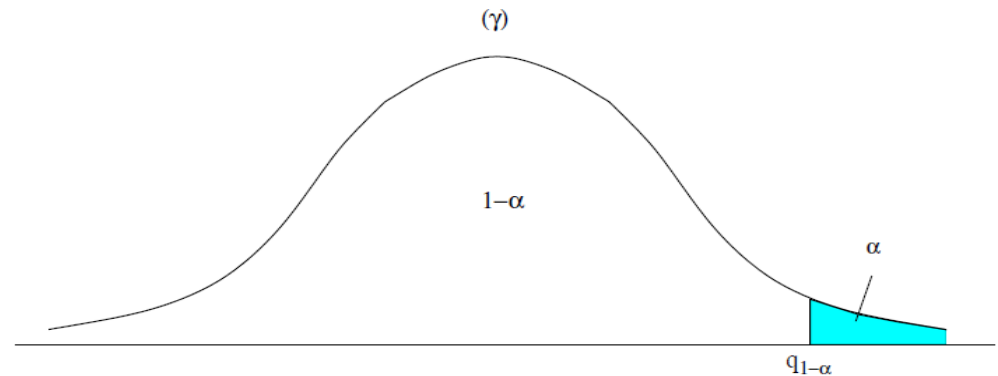
Δίπλευρος



Μονόπλευρος
προς τα αριστερά

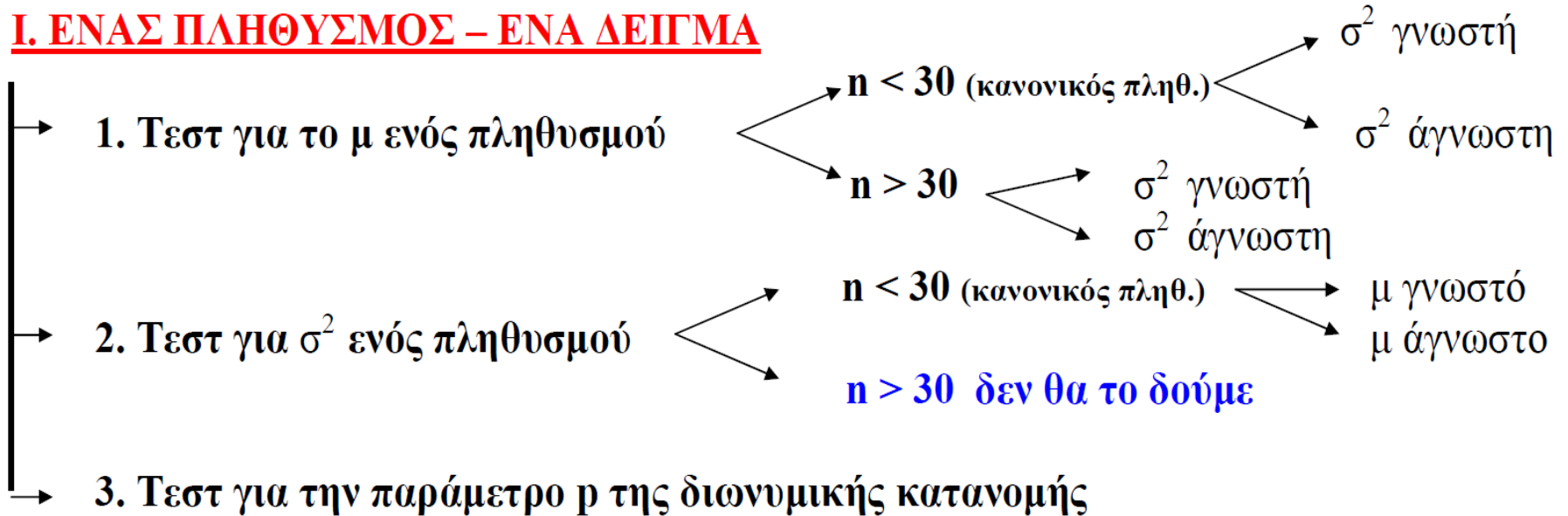


Μονόπλευρος
προς τα δεξιά



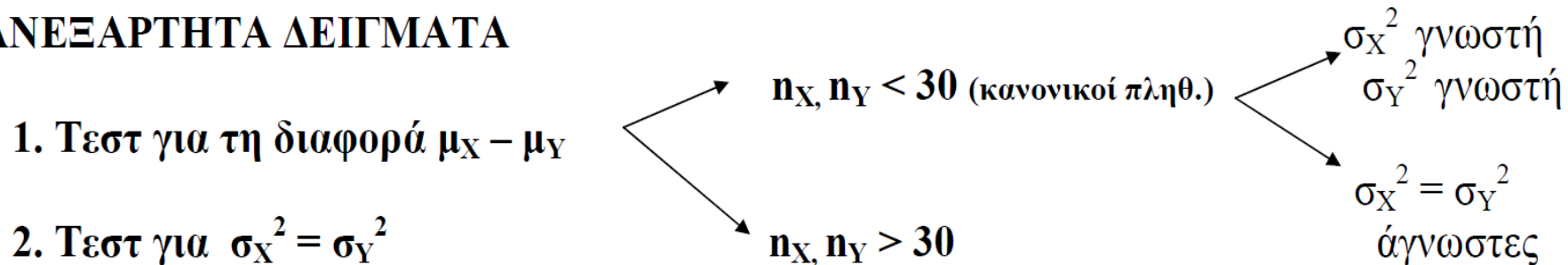
Έλεγχος Υποθέσεων

I. ΕΝΑΣ ΠΛΗΘΥΣΜΟΣ – ΕΝΑ ΔΕΙΓΜΑ



II. ΔΥΟ ΠΛΗΘΥΣΜΟΙ – ΔΥΟ ΔΕΙΓΜΑΤΑ

A. ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ ΔΕΙΓΜΑΤΑ



B. ΜΗ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ ΔΕΙΓΜΑΤΑ

Έλεγχος Υποθέσεων

A. Έλεγχος υποθέσεων για πληθυσμιακούς μέσους

1. Περιπτώσεις που η στατιστική συνάρτηση ελέγχου είναι η Z

1. Η σ είναι γνωστή και ο πληθυσμός κανονικός
2. Η σ είναι γνωστή και το μέγεθος του δείγματος τουλάχιστον 30 (ο πληθυσμός δεν χρειάζεται να είναι κανονικός)

2. Περιπτώσεις που η στατιστική συνάρτηση ελέγχου είναι η t

1. Ο πληθυσμός είναι κανονικός και η σ είναι άγνωστη αλλά η δειγματική τυπική **απόκλιση S** είναι γνωστή



Έλεγχος Υποθέσεων για πληθυσμιακούς μέσους

3. Περιπτώσεις που δεν καλύπτονται από τις στατιστικές συναρτήσεις ελέγχου Z και t

1. Ο πληθυσμός δεν είναι κανονικός και η σ είναι άγνωστη.
2. Ο πληθυσμός δεν είναι κανονικός και το μέγεθος είναι μικρότερο του 30.
3. Ο πληθυσμός είναι κανονικός, η σ είναι άγνωστη καθώς και η δειγματική τυπική απόκλιση. Είναι γνωστός μόνο ο δειγματικός μέσος \bar{x} , ενώ δεν είναι γνωστά τα δειγματικά δεδομένα (οπότε δεν μπορεί να υπολογισθεί το S).



Έλεγχος Υποθέσεων για πληθυσμιακές διακυμάνσεις

Η στατιστική συνάρτηση ελέγχου που χρησιμοποιείται είναι η χ^2

Evidence

Sample Size **15** n
Sample Variance **1702.6** s^2

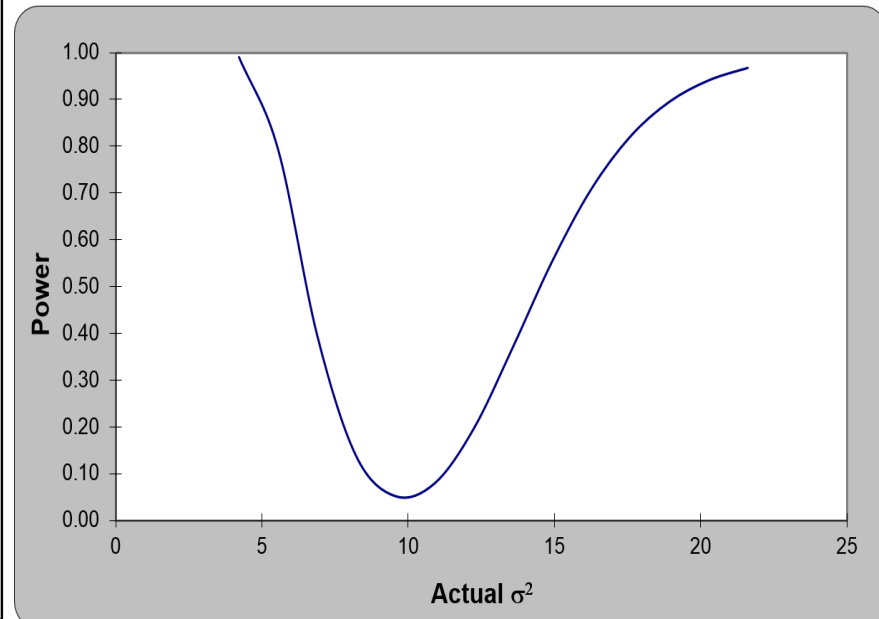
Assumption:
Population Normal

Test Statistic **23.837** χ^2

At an α of

Null hypothesis	p -value	5%
$H_0: \sigma^2 = 1000$	0.0959	
$H_0: \sigma^2 \geq 1000$	0.9521	
$H_0: \sigma^2 \leq 1000$	0.0479	Reject

Σχήμα 1: Έλεγχος
Σχήμα 2: Καμπύλη ισχύος
(αντίθετη του σφάλμα τύπου II)



Συμπεράσματα

Έννοιες του ελέγχου στατιστικών υποθέσεων

- Ορισμός μηδενικής υπόθεσης H_0
- Ορισμός εναλλακτικής υπόθεσης H_1

Ο έλεγχος είναι είτε **δίπλευρος** είτε **μονόπλευρος**

Σε οποιονδήποτε έλεγχο υπάρχουν οι **πιθανότητες σφάλματος τύπου I και τύπου II**

Όταν η τιμή p είναι μικρότερη του επιπέδου σημαντικότητας α , η **μηδενική υπόθεση απορρίπτεται**

Η πιθανότητα να μην γίνει σφάλμα τύπου I είναι γνωστή ως **επίπεδο εμπιστοσύνης**, ενώ

Η πιθανότητα να μην γίνει σφάλμα τύπου II είναι γνωστή ως **ισχύς του ελέγχου**.

Αυξάνοντας το μέγεθος του δείγματος, μειώνονται οι πιθανότητες των 2 σφαλμάτων

Γίνεται ένας **συμβιβασμός μεταξύ σφαλμάτων τύπου I και II**, ανάλογα με το κόστος τους, οπότε επιλέγεται ένα **βέλτιστο μέγεθος δείγματος και ένα κατάλληλο επίπεδο σημαντικότητας**.

