τόξου.

Η επιφάνεια F ισούται με $\boxed{F = \text{επιφάνεια} = \dfrac{r\,(b - l) + l\,h}{2}}$

Όπου $\boxed{h = 2r\ \eta\mu^2\ \dfrac{\alpha}{2}}$ $\boxed{l = 2r\eta\mu\alpha.}$ $\boxed{b = 2r\ \dfrac{\alpha^\circ}{57{,}3^\circ}}$

<u>Παράδειγμα</u>.

Αν ένα κυκλικό τμήμα έχει ακτίνα r = 10 εκ, και γωνία 45^o, οπότε η γωνία είναι α = 45/2 = $22{,}5^o$

τότε η απόσταση του κέντρου βάρους από το κέντρο του κύκλου, ισούται με **$y_o = L^3 / (12 * F)$**

όπου

L = 2 * r * ημα = 2 * 10 * ημ22,5 = 7,654 εκ

F = [r * (b - L) + L * h] / 2

όπου

b = 2 * r * α / 57,3 = 2 * 10 * 22,5 / 57,3 = 7,854 εκ.

h = 2 * r * $\eta\mu^2$ (α / 2) = 2 * 10 * $\eta\mu^2$ (22.5 / 2) = 2 * 10 * $\eta\mu^2$ 11.25 = 0,761 εκ

=> F = [10 * (7,854 - 7,654) + 7,654 * 0,761] / 2 = (1,99 + 5,825) / 2 = 3,907 εκ2

=> **$y_o = L^3 / (12 * F)$** = $7{,}654^3$ / (12 * 3,907) = 9,564 εκ

Παρατηρούμε ότι το κέντρο βάρους του τόξου ως γραμμή, με τα ίδια γεωμετρικά δεδομένα, είναι στο 9,75 εκ,

το κέντρο βάρους του κυκλικού τομέα, ως επιφάνεια (από το κέντρο του κύκλου ως το τόξο), είναι στα 2/3 αυτού, δηλαδή στο 6,75 εκ

το κέντρο βάρος του κυκλικού τμήματος, ως επιφάνεια (από την χορδή ως το τόξο), είναι 9,564 εκ

1.3 Κεντροειδές συνθέτων επιφανειών

1.3.0 γενικά

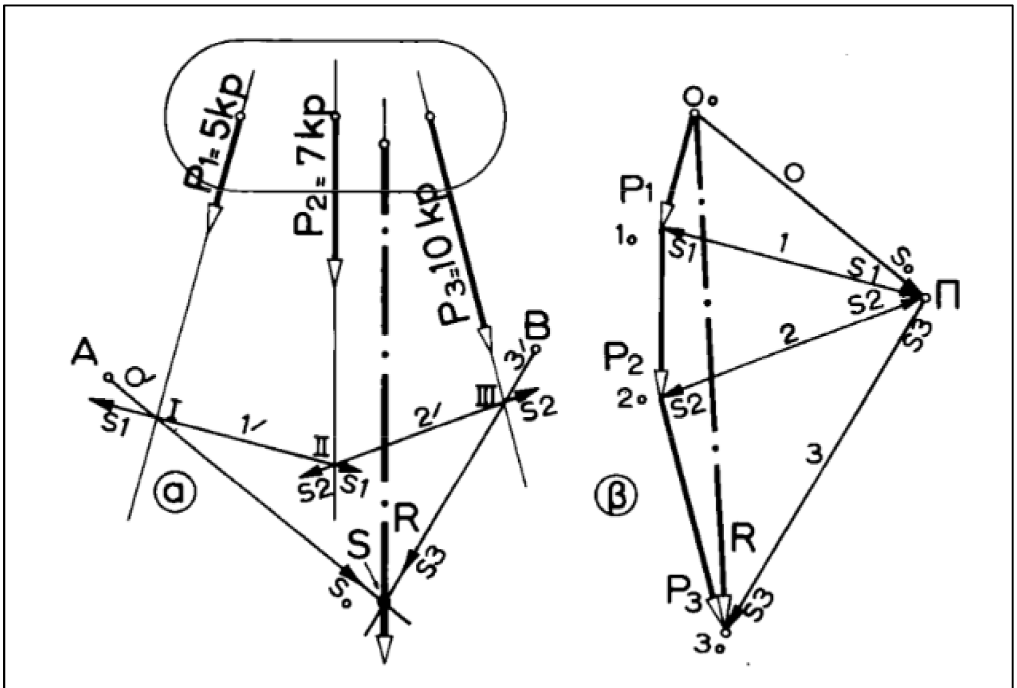
Για να βρεθεί το κεντροειδές μιας σύνθετης επιφάνειας, θεωρούμε τα εμβαδά των όποιων τμημάτων της, από τα οποία αποτελείται, ως δυνάμεις παράλληλες μεταξύ τους, με μέγεθος ίσο με το εμβαδόν τους.

Το κεντροειδές της σύνθετης επιφάνειας, είναι το σημείο τομής της συνισταμένης των δυνάμεων αυτών, κατά Χ και κατά Ψ. οπότε το βρίσκουμε στο σημείο τομής της ευθείας ενέργειας της συνισταμένης κατά Χ, με το σημείο τομής της ευθείας ενέργειας της συνισταμένης κατά Ψ.

Για να βρούμε την συνισταμένη (κατά χ και κατά ψ) χρησιμοποιούμε 2 μεθόδους, (α) την γραφική μέθοδο, με την βοήθεια του δυναμοπολυγώνου και του σχοινοπολυγώνου, και (β) την αναλυτική μέθοδο, δηλαδή με (αναλυτικό) μαθηματικό τύπο, με την βοήθεια της πρότασης των ροπών.

1.3.1 γραφική μέθοδος, γενικά

Πριν περιγράψουμε την γραφική μέθοδο, πως χρησιμοποιείται για την εύρεση του κέντρου βάρους σύνθετης επιφάνειας, σκόπιμο είναι να περιγραφεί πρώτα η γραφική μέθοδος. Η μέθοδος αυτή αναλύεται κεφάλαιο 4 στο βιβλίο Μηχανική των Γκρος - Λαζαρίδη.



Σχ. 4.1α.

Στο ανωτέρω σώμα του σχήματος, δρουν 3 δυνάμεις, η P_1, η P_2 και η P_3. Το μήκος του κάθε διανύσματος δύναμης, είναι ανάλογο με το μέγεθος της δύναμης.

Σχηματίζουμε το δυναμο-πολύγωνο ως εξής.

1. φέρουμε ένα τυχαίο σημείο O_o, εκτός του σχήματος.
2. από το σημείο O_o φέρουμε ένα διάνυσμα ίσο και παράλληλο με την P_1.
3. στο τέλος της P_1 είναι το σημείο 1_o.
4. στο σημείο 1_o φέρουμε ένα διάνυσμα ίσο και παράλληλο με την P_2.
5. στο τέλος της P_2 είναι το σημείο 2_o.
6. στο σημείο 2_o φέρουμε ένα διάνυσμα ίσο και παράλληλο με την P_3.
7. στο τέλος της P_3 είναι το σημείο 3_o
8. το σύνολο των 3 διανυσμάτων P_1, η P_2 και η P_3, αρχόμενα από το τυχαίο σημείο Οο , λέγεται δυναμοπολύγωνο.
9. ενώνουμε το O_o με το 3_o.
10. αυτή είναι η συνισταμένη R των ανωτέρω δυνάμεων
11. φέρουμε ένα τυχαίο σημείο Π, εκτός του δυναμοπολυγώνου, που λέγεται πόλος
12. από το Π ως το 1_o , φέρουμε την πολική ακτίνα 1
13. από το Π ως το 2_o , φέρουμε την πολική ακτίνα 2
14. από το Π ως το 3_o , φέρουμε την πολική ακτίνα 3

Σχηματίζουμε το σχοινο-πολύγωνο ως εξής.

15. φέρουμε ένα τυχαίο σημείο Ι, επάνω στην ευθεία ενέργειας (προέκταση) της P_1.
16. από το σημείο Ι, φέρουμε παράλληλη προς την πολική ακτίνα 1, την ευθεία 1’
17. το σημείο τομής της ευθείας 1’ με την ευθεία ενέργειας της P_2 , λέγεται σημείο ΙΙ
18. από το σημείο ΙΙ, φέρουμε παράλληλη προς την πολική ακτίνα 2, την ευθεία 2’
19. το σημείο τομής της ευθείας 2’ με την ευθεία ενέργειας της P_3 , λέγεται σημείο ΙΙΙ
20. από το σημείο Ι, φέρουμε παράλληλη με την πολική ακτίνα 0, την ευθεία 0’, και προς την μέσα πλευρά του συστήματος δυνάμεων,
21. αλλά και προς τα έξω, παίρνοντας το σημείο Α
22. από το σημείο ΙΙΙ, φέρουμε παράλληλη με την πολική ακτίνα 3, την ευθεία 3’ και προς την μέσα πλευρά του συστήματος δυνάμεων,
23. αλλά και προς τα έξω, παίρνοντας το σημείο Β
24. το σημείο τομής της 0’ και της 3’ είναι το σημείο S
25. το σημείο S είναι το σημείο της ευθείας ενέργειας της συνισταμένης
26. σχηματίζεται έτσι το σχοινοπολύγωνο, που περιλαμβάνει τα σημεία Α, Ι, ΙΙ, ΙΙΙ, και Β.

Περιληπτικά ο τρόπος εργασίας στην γραφική μέθοδο

1. σχεδιάζουμε το σώμα με τις δυνάμεις οι οποίες δρουν επάνω του
2. ξεκινώντας από τυχαίο σημείο 0, κατασκευάζουμε το δυναμο-πολύγωνο, και βρίσκουμε έτσι την συνισταμένη R
3. με χρήση τυχαίου σημείου Π, εκτός του δυναμοπολυγώνου, φέρουμε τις πολικές ακτίνες

4. από τυχαίο σημείο της ευθείας ενέργειας της P_1, σχεδιάζουμε το σχοινοπολύγωνο, φέροντας παράλληλες προς τις πολικές ακτίνες
5. το σημείο τομής της παράλληλης 0’ στην πολική ακτίνα 0, και της 3’ παράλληλης στην πολική ακτίνα 3, είναι το σημείο της ευθείας επιρροής της συνισταμένης

Το δυναμοπολύγωνο λέγεται έτσι, γιατί είναι πολύγωνο, που σχηματίζεται από τα διανύσματα των δυνάμεων που δρουν στο σώμα.

Το συγκεκριμένο δυναμοπολύγωνο $0_o\ 1_o\ 2_o\ 3_o$ είναι ανοιχτό.

Το σχοινοπολύγωνο λέγεται έτσι, επειδή έχει την μορφή σχοινιού χωρίς βάρος, το οποίο σχοινί, αν κρεμαστεί από τα σημεία Α και Β, και φορτιστεί με τις δυνάμεις P_1, η P_2 και η P_3, θα πάρει την μορφή του σχοινοπολυγώνου.

Το συγκεκριμένο σχοινοπολύγωνο Α, Ι, ΙΙ, ΙΙΙ, και Β, είναι ανοικτό.

Όταν σχεδιάζουμε το δυναμοπολύγωνο και το σχοινοπολύγωνο, υπάρχουν 3 περιπτώσεις

Α) να έχουμε δυναμοπολύγωνο ανοικτό, και σχοινοπολύγωνο ανοικτό, όπως στο σχήμα αυτό, και όπως στις ασκήσεις για τα κεντροειδή συνθέτων επιφανειών, με αποτέλεσμα να έχουμε 1 συνισταμένη

Β) να έχουμε δυναμοπολύγωνο κλειστό, και σχοινοπολύγωνο ανοικτό, με αποτέλεσμα να έχουμε ζεύγος δυνάμεων

Γ) να έχουμε δυναμοπολύγωνο κλειστό, και σχοινοπολύγωνο κλειστό, με αποτέλεσμα να έχουμε ισορροπία

1.3.2 γραφική μέθοδος, για υπολογισμό κεντροειδούς

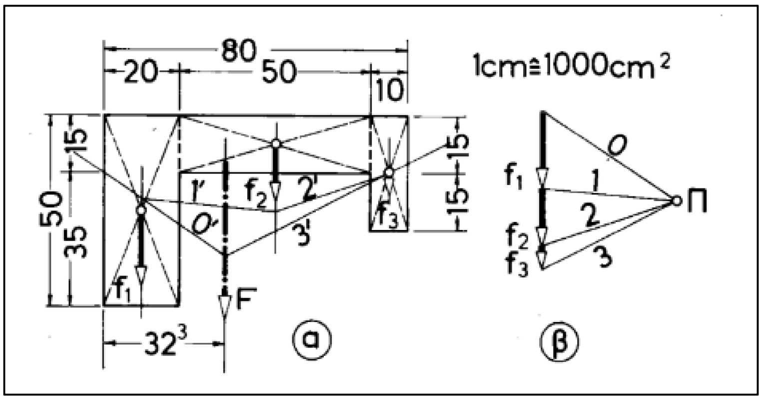
Για να βρούμε το κέντρο βάρους σύνθετης επιφάνειας, χωρίζουμε την σύνθετη επιφάνεια σε επιμέρους επιφάνειες, για παράδειγμα σε ορθογώνια, αν η σύνθετη επιφάνεια αποτελείται από απλά ορθογώνια. Το κάθε ορθογώνιο έχει εμβαδόν f_1, f_2, f_3 με γνωστό κέντρο βάρους. Στα ορθογώνια το κέντρο βάρους βρίσκεται στο σημείο τομής των διαγωνίων.

Από τις διαστάσεις του σχήματος 6.3.α, υπολογίζουμε τα εμβαδά των τμημάτων

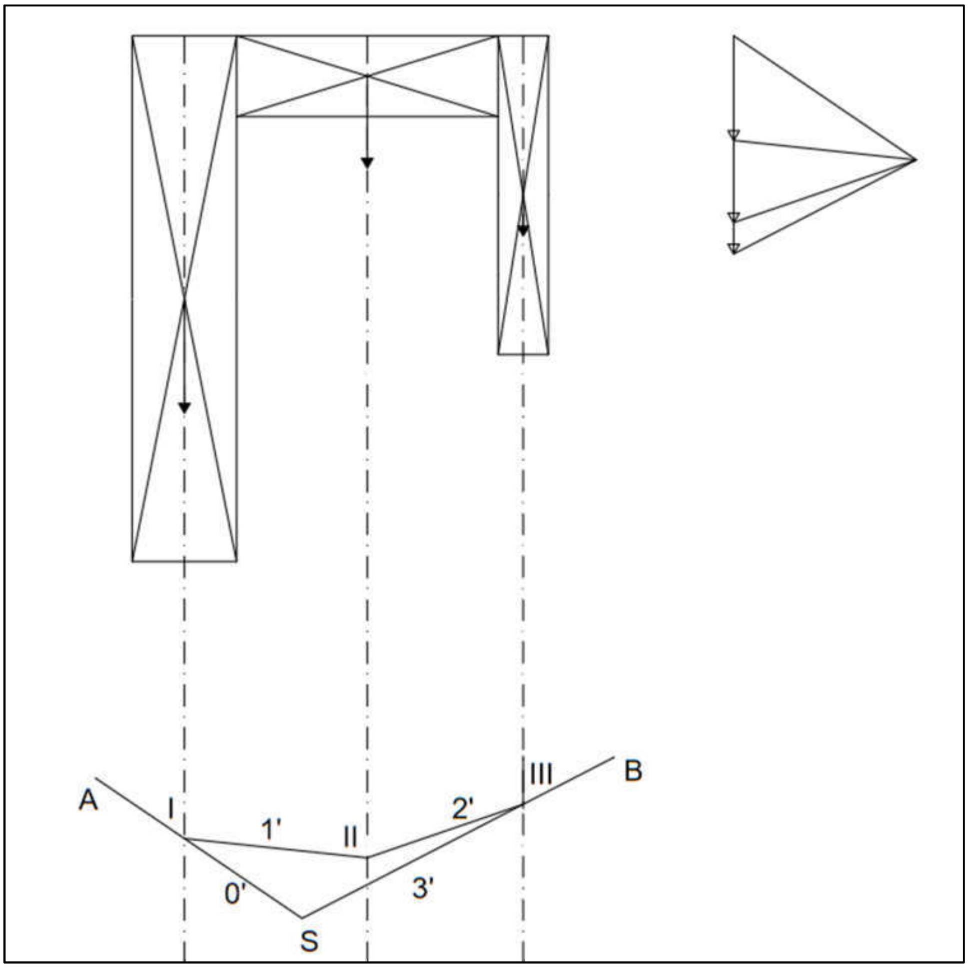
$$\begin{aligned} f_1 &= 50 \times 20 = 1000\ cm^2 \\ f_2 &= 50 \times 15 = 750\ cm^2 \\ f_3 &= 10 \times 30 = 300\ cm^2 \end{aligned}$$

Αναφερόμαστε δηλαδή σε στατική ροπή επιφανειών. Θεωρούμε ότι τα βάρη των επιφανειών, είναι ανάλογα με τα εμβαδά των επιφανειών, και ανάλογα με τα βάρη ενός στερεού σώματος, που έχει διατομή την σύνθετη επιφάνεια.

Πρώτα κάνουμε την γραφική μέθοδο κατά ψ (τα φορτία κατακόρυφα)



Φέρουμε τις δυνάμεις των επιμέρους τμημάτων, ως κατακόρυφα διανύσματα, μήκους ανάλογα με το εμβαδόν του κάθε επί μέρους τμήματος. Με την βοήθεια του δυναμοπολυγώνου και του σχοινοπολυγώνου, βρίσκουμε την συνισταμένη των κατακόρυφων δυνάμεων, και την ευθεία ενέργειας της συνισταμένης.

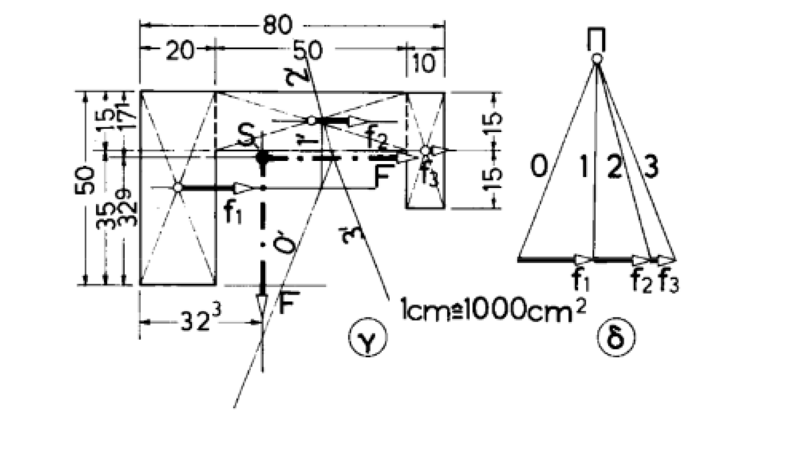


Μετράμε την απόσταση της ευθείας ενέργειας της συνισταμένης, από την πιο αριστερή πλευρά της σύνθετης επιφάνειας.

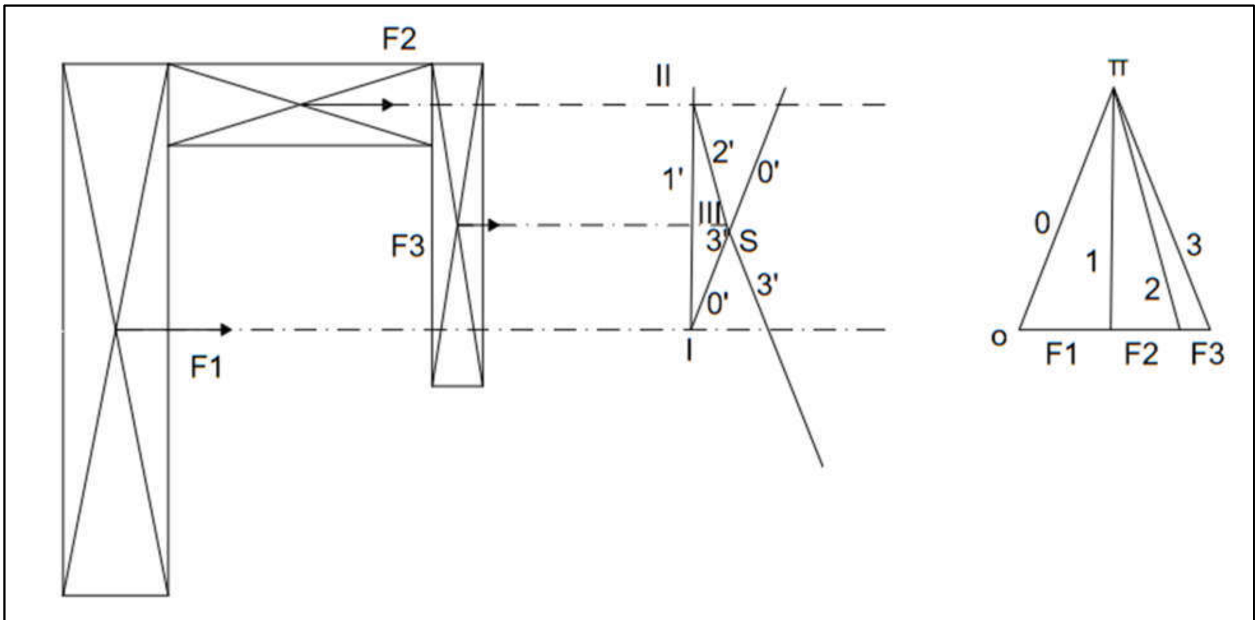
Χρησιμοποιούμε μετά την γραφική μέθοδο, με τα φορτία κατά χ (οριζόντια).

Φέρουμε τις δυνάμεις των επιμέρους τμημάτων, ως οριζόντια διανύσματα, μήκους ανάλογα με το εμβαδόν του κάθε επί μέρους τμήματος. Με την βοήθεια του δυναμοπολυγώνου και του σχοινοπολυγώνου, βρίσκουμε την συνισταμένη των οριζόντιων δυνάμεων, και την ευθεία ενέργειας της συνισταμένης.

Μετράμε την απόσταση της ευθείας ενέργειας της συνισταμένης, από την πιο πάνω πλευρά της σύνθετης επιφάνειας.



Σχ. 6.3α.



Εύρεση κέντρου βάρους

Το σημείο τομής της συνισταμένης των οριζόντιων, και της συνισταμένης των κατακόρυφων δυνάμεων, είναι το σημείο εφαρμογής της συνισταμένης του βάρους της σύνθετης επιφάνειας, δηλαδή το κέντρο βάρους (ή κεντροειδές) S.