Κεφάλαιο 1. Κέντρο βάρους - ευστάθεια

Όπως αναφέρθηκε, μετά από την παράθεση του 6^{ου} κεφαλαίου του βιβλίου, που αποτελεί και το κύριο εκπαιδευτικό υλικό για το μάθημα, ακολουθούν επεξηγήσεις, διασαφήνιση κάποιων πραγμάτων, επίλυση πρωτότυπων παραδειγμάτων για τα οποία δεν υπάρχουν, αλλά και επίλυση κάποιων των προς λύση ασκήσεων. Οι παρούσες σημειώσεις δεν έχουν σκοπό να αντικαταστήσουν το βιβλίο αυτό, το οποίο διδασκόταν για δεκαετίες, αλλά να <u>συμπληρώσουν</u> και να <u>αποσαφηνίσουν</u> κάποια πράγματα, καθώς και να <u>επιλύσουν</u> τις ασκήσεις λυμένες και άλυτες, και να <u>προσθέσουν</u> κάποια <u>παραδείγματα</u> για την καλύτερη κατανόηση της ύλης.

1.1 Γενικά

Το κάθε σώμα αποτελείται από πολλά μικρά κομμάτια ύλης. Σε κάθε κομμάτι, ασκείται η δύναμη βάρους, με φορά το κέντρο της Γης. Όλα τα τεμάχια έχουν βάρη, που είναι παράλληλα με φορά το κέντρο της Γης. Η συνισταμένη όλων αυτών των παράλληλων δυνάμεων, βάρους του κάθε τμήματος, αποτελεί το βάρος του σώματος. Το σημείο εφαρμογής της συνισταμένης δύναμης βάρους, είναι το κέντρο βάρους του σώματος.

Αν στραφεί το σώμα, οι δυνάμεις βάρους θα παραμείνουν παράλληλες, και με φορά το κέντρο της Γης. Οπότε το κέντρο βάρους είναι το σημείο όπου περνάει η συνισταμένη των δυνάμεων βαρύτητας, όλων των τμημάτων, για οποιαδήποτε θέση και αν στραφεί το σχήμα.

Όπως έχουν κέντρο βάρους τα σώματα, έχουν επίσης οι γραμμές και οι επιφάνειες. Όμως οι γραμμές και οι επιφάνειες δεν έχουν βάρος (δεν είναι σώματα) γιατί δεν έχουν μάζα. Οπότε το (υποθετικό) κέντρο βάρους γραμμής και επιφάνειας λέγεται κεντροειδές.

Όταν έχουμε ένα σώμα, από ομοιογενές υλικό και όμοιο πάχος, το οποίο αποτελείται από διάφορα σχήματα, τότε λόγω όμοιου υλικού (άρα ίδιο ειδικό βάρος), και όμοιου πάχους, το κέντρο βάρος του σώματος, ισούται με το κέντρο βάρους - κεντροειδές της επιφάνειας. Και το κέντρο βάρους της επιφάνειας, βρίσκεται αν βρούμε το κέντρο βάρους του κάθε τμήματος που την αποτελούν, και βρούμε την συνισταμένη τους.

Κεντροβαρικός άξονας, είναι κάθε ευθεία που διέρχεται από το κέντρο βάρους. Οι ευθείες συμμετρίας όπως π.χ. η διάμετρος κύκλου, και οι διαγώνιοι ενός τετραγώνου, αποτελούν κεντροβαρικούς άξονες.

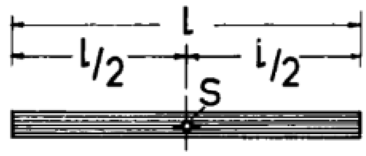
Το κέντρο βάρους, μπορεί να βρεθεί

- είτε σχεδιαστικά ως σημείο τομής των κεντροβαρικών αξόνων
- είτε θεωρητικά, όπως αναλύεται στην παράγραφο 1.3, (α) με την γραφική μέθοδο, ή (β) με την αναλυτική μέθοδο, με την εξίσωση των ροπών
- είτε πρακτικά με πείραμα, με την ανάρτηση του σώματος, από 2 διαφορετικά σημεία (διπλή ανάρτηση)

1.2 Κεντροειδές απλών γραμμών και επιφανειών

1.2.1 ευθείας γραμμής

Σώματα, που έχουν μεγάλο μήκος, σε σχέση με το πλάτος και το ύψος τους, και που έχουν την ίδια διατομή σε όλο το μήκος τους, θεωρούνται ως ευθείες γραμμές. Το κεντροειδές S της ευθείας γραμμής, βρίσκεται στο μέσο του μήκους L της γραμμής.



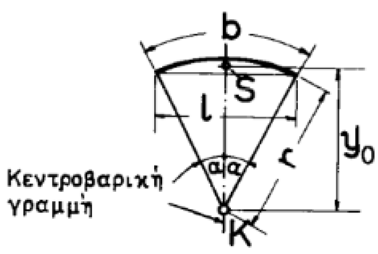
Σχ. 6.2α.

Παράδειγμα.

Αν μια γραμμή έχει μήκος L = 10 μέτρα, το κεντροειδές S βρίσκεται στο μέσο του μήκους L/2 = 5 μέτρα

1.2.2 κυκλικού τόξου (*ως γραμμή*)

Το κεντροειδές S (κέντρο βάρους) του κυκλικού τόξου μήκους b, με μήκος ευθείας χορδής τόξου L, βρίσκεται σε απόσταση y_o από το κέντρο K του τόξου, που έχει ακτίνα r. Ο κεντροβαρικός άξονας, βρίσκεται στο μέσο του τόξου, και χωρίζει την γωνία του τόξου 2α, σε 2 μισές γωνίες α.



Σχ. 6.2β.

Η απόσταση του κέντρου βάρους y_o ισούται με

$$y_o = \frac{r \cdot l}{b}$$

όπου r = ακτίνα του κύκλου στο οποίο ανήκει το τόξο

L = το μήκος της χορδής, L = 2 * r * ημα

Και b το μήκος του τόξου, όπου

$$b = 2r \frac{\alpha^\circ}{57{,}3^\circ}$$

Παράδειγμα.

Αν ένα τόξο έχει ακτίνα r = 10 εκ, γωνία 45^o, και μήκος χορδής L = 7,6537 εκ., τότε η γωνία είναι α = 45/2 = 22,5^o , και μήκος **b = 2 * r * α / 57,3** = 2 * 10 * 22,5 / 57,3 = 7,854 εκ.

Και η απόσταση του κέντρου βάρους S από το κέντρο Κ του κύκλου, είναι **y_o = r * L / b** = 10 * 7,6537 / 7,854 = 9,75 εκ

1.2.2.1 ειδικές περιπτώσεις

Ημιπεριφέρεια (ημικύκλιο), γωνία τόξου 360/2 = 180^o, άρα γωνία α = 180 / 2 = 90^o

$$\boxed{y_0 = \frac{2r}{\pi} = 0{,}6366\ r.}$$

Τεταρτοπεριφέρεια (τεταρτοκύκλιο), γωνία τόξου 360 / 4 = 90^o, άρα γωνία α = 90 / 2 = 45^o

$$\boxed{y_0 = \frac{2\ r\ \sqrt{2}}{\pi} = 0{,}9003\ r.}$$

Εκτοπεριφέρεια (εκτοκύκλιο), γωνία τόξου 360 / 6 = 60, άρα γωνία α = 60 / 2 = 30^o

$$\boxed{y_0 = \frac{3\ r}{\pi} = 0{,}9549\ r.}$$

Παράδειγμα.

Αν ένα τόξο είναι ημιπεριφέρεια, με ακτίνα κύκλου 10 εκ, τότε η απόσταση του κέντρου βάρους από το κέντρο του κύκλου, ισούται με **y_o = 0.6366 * r** = 0.6366 * 10 = 6,366 εκ

Αν ένα τόξο είναι τεταρτοπεριφέρεια, με ακτίνα κύκλου 10 εκ, τότε η απόσταση του κέντρου βάρους από το κέντρο του κύκλου, ισούται με **y_o = 0.9003 * r** = 0. 9003 * 10 = 9,003 εκ

Αν ένα τόξο είναι εκτοπεριφέρεια, με ακτίνα κύκλου 10 εκ, τότε η απόσταση του κέντρου βάρους από το κέντρο του κύκλου, ισούται με **y_o = 0.9549 * r** = 0. 9549 * 10 = 9,549 εκ

1.2.3 κυκλικής περιφέρειας (*ως γραμμή*) και κύκλου (*ως επιφάνεια*)

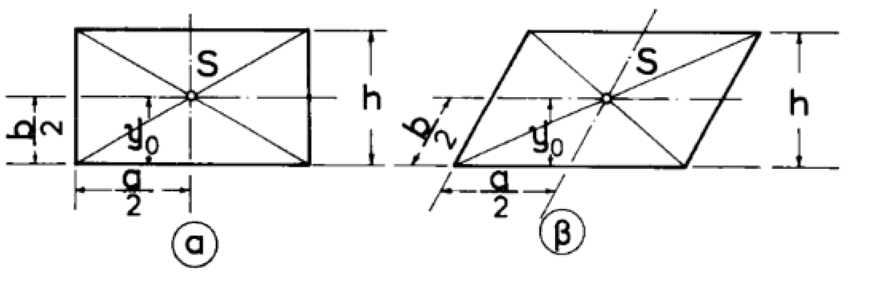
Το κεντροειδές S (κέντρο βάρους) του κύκλου, ως γραμμή και ως επιφάνεια, είναι το κέντρο Κ του κύκλου.

1.2.4 ορθογώνιου παραλληλόγραμμου, πλάγιου παραλληλόγραμμου, ρόμβου, τετραγώνου (*ως γραμμή - περίμετρος, και ως επιφάνεια*)

Το κεντροειδές S (κέντρο βάρους) του ορθογώνιου παραλληλόγραμμου, του πλάγιου παραλληλόγραμμου, του ρόμβου, και του τετραγώνου, βρίσκεται στο σημείο τομής των διαγωνίων.

Η απόσταση του κέντρου βάρους S από την κάτω βάση του ορθογωνίου, πλαγίου, ρόμβου & τετραγώνου ισούται με

$$\boxed{y_0 = \frac{h}{2}}$$



Σχ. 6.2γ.

<u>Παράδειγμα</u>.

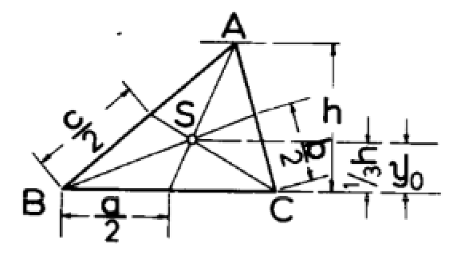
Αν ένα πλάγιο παραλληλόγραμμο, έχει βάση α = 10 εκ, πλάγια ακμή β = 7 εκ, και ύψος h = 5 εκ, τότε το κέντρο βάρους βρίσκεται σε απόσταση από την κάτω βάση, ίση με **y_o = h / 2 =** 5 / 2 = 2,5 εκ

1.2.5 τριγώνου (*ως επιφάνεια*)

Το κεντροειδές S (κέντρο βάρους) του τριγώνου, βρίσκεται στο σημείο τομής των διαμέσων.

Η απόσταση κέντρου βάρους S από την κάτω βάση του τριγώνου, ισούται με

$$\boxed{y_0 = \frac{h}{3}}$$



Σχ. 6.2δ.

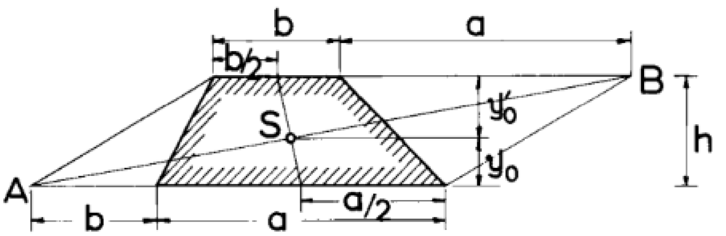
Παράδειγμα.

Αν ένα τρίγωνο, έχει βάση α = 10 εκ, πλευρά β = 6,253 εκ, πλευρά c = 8 εκ, και ύψος h = 5 εκ, τότε το κέντρο βάρους του, βρίσκεται σε απόσταση $\mathbf{y_o = h / 3}$ = 5 / 3 = 1,67 εκ

1.2.6 τραπεζίου (*ως επιφάνεια*)

Το κεντροειδές S (κέντρο βάρους) του τραπεζίου, μπορεί να βρεθεί σχεδιαστικά - γραφικά, είτε αναλυτικά (με τύπο)

Για να βρεθεί γραφικά, επεκτείνουμε την κάτω βάση α (βάση μεγάλη), κατά το μήκος της πάνω πλευράς β (βάση μικρή) προς τα αριστερά, και παίρνουμε το σημείο Α. Έπειτα επεκτείνουμε την πάνω βάση β, κατά το μήκος α της κάτω, προς τα δεξιά, και παίρνουμε το σημείο Β. Μετά ενώνουμε τα σημεία Α και Β. Μετά ενώνουμε τα μέσα των πάνω και κάτω βάσεων. Το κέντρο βάρους του τραπεζίου, βρίσκεται στο σημείο τομής, της ευθείας ΑΒ, με την ευθεία που ενώνει τα 2 μέσα των βάσεων.



Σχ. 6.2ε.

Αναλυτικά (δηλαδή με τύπο), η απόσταση y_o του κέντρου βάρους από την κάτω βάση, δίνεται από τον 1ο τύπο, και η απόσταση y_o' του κέντρου βάρους από την πάνω βάση δίνεται από το 2ο τύπο.

$$\boxed{y_0 = \frac{h}{3}\,\frac{a + 2b}{a + b}} \qquad \boxed{y_0' = \frac{h}{3}\,\frac{2a + b}{a + b}}$$

Ισχύει ότι $\boxed{\mathbf{y_o' = h - y_o}}$

Παράδειγμα.

Αν ένα τραπέζιο, έχει κάτω βάση α = 10 εκ, πάνω βάση β = 8 εκ, και ύψος h = 6 εκ, τότε το κέντρο βάρους του, βρίσκεται σε απόσταση $\mathbf{y_o}$ = **(h / 3) * [(α + 2 * β) / (α + β)] =**
= (6 / 3) * [(10 + 2 * 8) / (10 + 8)] = 2 * (26 / 18) = 2,89 εκ

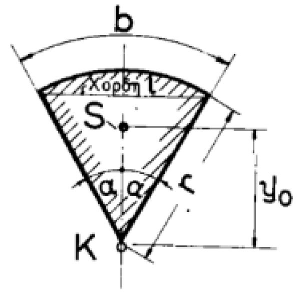
Μόνο για λόγους επαλήθευσης των πράξεων, υπολογίζουμε το $\mathbf{y_o'}$, και παίρνουμε
y_o' = (6 / 3) * [(2 * 10 + 8) / (10 + 8)] = 2 * (28 / 18) = 3,11 εκ

Και βλέπουμε ότι 2,89 + 3,11 = 6 εκ, άρα οκ.

1.2.7 κυκλικός τομέας (*ως επιφάνεια*)

Το κεντροειδές S (κέντρο βάρους) του κυκλικού τομέα, μήκους b, με μήκος ευθείας χορδής τόξου L, βρίσκεται σε απόσταση y_o από το κέντρο K του τόξου (κέντρο του κύκλου), που έχει ακτίνα r. Το μήκος L της χορδής, ισούται με **L = 2 * r * ημα**

Ο κεντροβαρικός άξονας, βρίσκεται στο μέσο του τόξου, του κυκλικού τομέα, και χωρίζει την γωνία του τόξου 2α, σε 2 μισές γωνίες α.



Σχ. 6.2ζ.

Η απόσταση του κέντρου βάρους y_o ισούται με

$$y_0 = \frac{2}{3} \frac{r \cdot l}{b}$$

όπου r = ακτίνα του κύκλου στο οποίο ανήκει το τόξο

L = το μήκος της χορδής, $L = 2 * r * ημα$

Και b το μήκος του τόξου, όπου

$$b = 2r \frac{a°}{57{,}3°}$$

<u>Παράδειγμα</u>.

Αν ένας κυκλικός τομέας έχει ακτίνα r = 10 εκ, γωνία 45°, και μήκος χορδής L = 7,6537 εκ., τότε η γωνία είναι α = 45/2 = 22,5° , και μήκος **b = 2 * r * α / 57,3** = 2 * 10 * 22,5 / 57,3 = 7,854 εκ.

Και η απόσταση του κέντρου βάρους S από το κέντρο K του κύκλου, είναι **y_o = (2 / 3) * [r * L / b]** = (2/3) * (10 * 7,6537 / 7,854) = 2/3 * 9,75 = 6,5 εκ

1.2.7.1 ειδικές περιπτώσεις

Ημιπεριφέρεια (ημικύκλιο), γωνία κυκλικού τομέα 360/2 = 180°, άρα γωνία α = 180 / 2 = 90°

$$y_0 = \frac{4r}{3\pi} = 0{,}4244\ r$$

Τεταρτοπεριφέρεια (τεταρτοκύκλιο), γωνία κυκλικού τομέα 360 / 4 = 90°, άρα γωνία α = 90 / 2 = 45°

$$\boxed{y_0 = \frac{4r\sqrt{2}}{3\pi} = 0{,}6002\ r}$$

Εκτοπεριφέρεια (εκτοκύκλιο), γωνία κυκλικού τομέα 360 / 6 = 60, άρα γωνία α = 60 / 2 = 30°

$$\boxed{y_0 = \frac{2r}{\pi} = 0{,}6366\ r.}$$

<u>Παράδειγμα</u>.

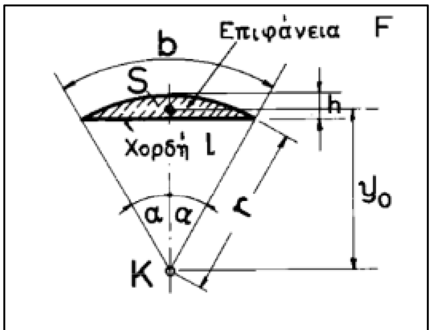
Αν ένας κυκλικός τομέας είναι ημιπεριφέρεια, με ακτίνα κύκλου 10 εκ, τότε η απόσταση του κέντρου βάρους από το κέντρο του κύκλου, ισούται με $\mathbf{y_o = 0.4244 * r}$ = 0.4244 * 10 = 4,244 εκ

Αν ένας κυκλικός τομέας είναι τεταρτοπεριφέρεια, με ακτίνα κύκλου 10 εκ, τότε η απόσταση του κέντρου βάρους από το κέντρο του κύκλου, ισούται με $\mathbf{y_o = 0.6002 * r}$ = 0. 6002 * 10 = 6,002 εκ

Αν ένας κυκλικός τομέας είναι εκτοπεριφέρεια, με ακτίνα κύκλου 10 εκ, τότε η απόσταση του κέντρου βάρους από το κέντρο του κύκλου, ισούται με $\mathbf{y_o = 0.6366 * r}$ = 0. 6366 * 10 = 6,366 εκ

1.2.8 κυκλικό τμήμα (*ως επιφάνεια*)

Το κεντροειδές S (κέντρο βάρους) του κυκλικού τμήματος, μήκους b, με μήκος ευθείας χορδής τόξου L, βρίσκεται σε απόσταση y_o από το κέντρο Κ του τόξου (κέντρο του κύκλου), που έχει ακτίνα r. Το μήκος L της χορδής, ισούται με **L = 2 * r * ημα.** Ο κεντροβαρικός άξονας, βρίσκεται στο μέσο του τόξου, του κυκλικού τμήματος, και χωρίζει την γωνία του τόξου 2α, σε 2 μισές γωνίες α.



Σχ. 6.2η.

Η απόσταση yo κέντρου βάρους S κυκλικού τμήματος, από το κέντρο Κ του κύκλου, είναι

$$\boxed{y_0 = \frac{l^3}{12F}}$$

όπου F = η επιφάνεια του κυκλικού τμήματος, L το μήκος της χορδής του τόξου.

Η επιφάνεια F ισούται με $F = \text{επιφάνεια} = \dfrac{r\,(b - l) + l\,h}{2}$

Όπου $h = 2r\,\eta\mu^2 \dfrac{\alpha}{2}$ $l = 2r\eta\mu\alpha.$ $b = 2r\,\dfrac{\alpha°}{57{,}3°}$

<u>Παράδειγμα</u>.

Αν ένα κυκλικό τμήμα έχει ακτίνα r = 10 εκ, και γωνία 45^o, οπότε η γωνία είναι α = 45/2 = $22{,}5^o$

τότε η απόσταση του κέντρου βάρους από το κέντρο του κύκλου, ισούται με **$y_o = L^3$ / (12 * F)**

όπου

L = 2 * r * ημα = 2 * 10 * ημ22,5 = 7,654 εκ

F = [r * (b - L) + L * h] / 2

όπου

b = 2 * r * α / 57,3 = 2 * 10 * 22,5 / 57,3 = 7,854 εκ.

h = 2 * r * $\eta\mu^2$ (α / 2) = 2 * 10 * $\eta\mu^2$ (22.5 / 2) = 2 * 10 * $\eta\mu^2$ 11.25 = 0,761 εκ

=> F = [10 * (7,854 - 7,654) + 7,654 * 0,761] / 2 = (1,99 + 5,825) / 2 = 3,907 εκ2

=> **$y_o = L^3$ / (12 * F)** = $7{,}654^3$ / (12 * 3,907) = 9,564 εκ

Παρατηρούμε ότι το κέντρο βάρους του τόξου ως γραμμή, με τα ίδια γεωμετρικά δεδομένα, είναι στο 9,75 εκ,

το κέντρο βάρους του κυκλικού τομέα, ως επιφάνεια (από το κέντρο του κύκλου ως το τόξο), είναι στα 2/3 αυτού, δηλαδή στο 6,75 εκ

το κέντρο βάρος του κυκλικού τμήματος, ως επιφάνεια (από την χορδή ως το τόξο), είναι 9,564 εκ