

Παράρτημα 8. Κεφάλαιο 5^ο «Μηχανική» Β' εξαμήνου ΔΙΕΚ, που ισοδυναμεί με το κεφάλαιο 13^ο «Μηχανική» των κ.κ. Γκρος & Λαζαρίδη

Παρατίθενται τα περιεχόμενα του κεφαλαίου 13, του βιβλίου «Μηχανική» των κ.κ. Γκρος & Λαζαρίδη, εκδόσεων Ιδρύματος Ευγενίδη. Το ανωτέρω βιβλίο μπορεί να ανακτηθεί από εδώ

https://www.eef.edu.gr/media/2200/e_f00019.pdf

Τα περιεχόμενα του βιβλίου για το κεφάλαιο 13, που ισοδυναμεί με το κεφάλαιο 4ο, της ύλης μας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΚΑΤΟ ΤΡΙΤΟ	
Κεντρομόλος δύναμη σώματος που εκτελεί ομαλή περιστροφική κίνηση γύρω από άξονα	
13.1 Γενικά	151
13.2 Φυγόκεντρος δύναμη στερεού	151
Ανακεφαλαίωση	153
13.3 Ασκήσεις	154

Παρατηρούμε ότι υπάρχει ταύτιση της ύλης του οδηγού σπουδών με τα αντίστοιχα κεφάλαια του βιβλίου Μηχανική, του Ευγενιδείου Ιδρύματος.

Μετά από την παράθεση του βιβλίου, που αποτελεί και το κύριο εκπαιδευτικό υλικό για το μάθημα, θα ακολουθήσουν επεξηγήσεις, διασαφήνιση κάποιων πραγμάτων, επίλυση πρωτότυπων παραδειγμάτων για τα οποία δεν υπάρχουν, αλλά και επίλυση κάποιων των προς λύση ασκήσεων.

Παρατίθενται παρακάτω, αυτούσιο, το ανωτέρω αναφερόμενο 13^ο κεφάλαιο του ανωτέρω βιβλίου «Μηχανική» των κ.κ. Γκρος & Λαζαρίδη, εκδόσεων Ιδρύματος Ευγενίδη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΚΑΤΟ ΤΡΙΤΟ

ΚΕΝΤΡΟΜΟΛΟΣ ΔΥΝΑΜΗ ΣΩΜΑΤΟΣ ΠΟΥ ΕΚΤΕΛΕΙ ΟΜΑΛΗ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ ΓΥΡΩ ΑΠΟ ΑΞΟΝΑ

13.1 Γενικά.

Θεωρούμε σώμα που εκτελεί ομαλή περιστροφική κίνηση γύρω από άξονα.

Κάθε σημείο του σώματος εκτελεί ομαλή περιστροφική κίνηση και προκαλεί μια κεντρομόλο δύναμη που διευθύνεται προς το κέντρο της περιφέρειας που διαγράφει το σημείο.

Αποδεικνύεται ότι η συνισταμένη όλων των στοιχειωδών κεντρομόλων δυνάμεων έχει την ίδια τιμή με αυτήν που προκύπτει αν όλη η μάζα του σώματος ήταν συγκεντρωμένη στο Κ.Β. του σώματος. Ας καλέσουμε:

- ω τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του σώματος
- u την περιφερειακή ταχύτητα του Κ.Β. (G) του σώματος
- r την απόσταση του Κ.Β. από τον άξονα περιστροφής ($u = \omega \cdot r$)
- B το βάρος και M την μάζα του στερεού ($B = M \cdot g$)
- γ_{κ} την κεντρομόλο επιτάχυνση του Κ.Β. (G) ($\gamma_{\kappa} = u^2/r = \omega^2 r$)
- F_{κ} την ένταση της κεντρομόλου δυνάμεως επί της μάζας M , που υποτίθεται συγκεντρωμένη στο Κ.Β. του σώματος

$$F_{\kappa} = M\omega^2 \cdot r \qquad F_{\kappa} = M \cdot \frac{u^2}{r}$$

Παρατηρήσεις.

1) Αν η ακτίνα είναι πολύ μεγάλη σχετικά με τις διαστάσεις του περιστρεφόμενου σώματος, μπορούμε να δεχθούμε ότι η συνισταμένη F διέρχεται από το Κ.Β., πράγμα που θα υποθέτουμε πως συμβαίνει στα επόμενα.

2) Αν σώμα περιστρέφεται γύρω από άξονα συμμετρίας του (π.χ. σφόνδυλος) τό Κ.Β. του βρίσκεται στον άξονα ($r=0$, $\omega^2 r=0$ και $F=0$).

13.2 Φυγόκεντρος δύναμη στερεού.

Στην κεντρομόλο δύναμη αντιστοιχεί μια ίση αντίδραση: **Η φυγόκεντρος δύναμη.**

Παράδειγμα 1.

Όταν σφαίρα σφενδονίζεται:

α) Το νήμα έλκει την σφαίρα προς τα μέσα. Αυτή η έλξη είναι η **κεντρομόλος δύναμη**.

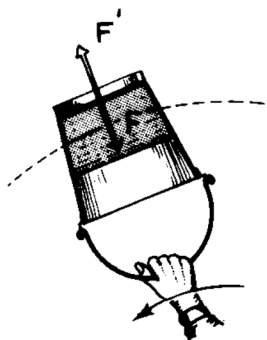
β) Σύμφωνα με την αρχή της ισότητας δράσεως και αντιδράσεως η σφαίρα τραβά το νήμα προς τα έξω με μια δύναμη F' αντίθετη της F και της αυτής εντάσεως.

Η δύναμη αυτή λέγεται **φυγόκεντρος**.

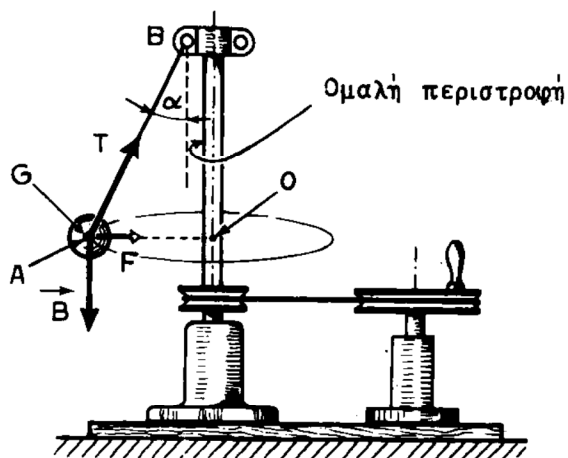
Παράδειγμα 2.

Έστω κουβάς που περιέχει νερό. Αν τον κουβά δεμένο στην άκρη σχοινού αρχίσουμε να τον λεριστρέφουμε σε ένα κατακόρυφο επίπεδο, το νερό παραμένει στον πυθμένα του κουβά και όταν ακόμα βρίσκεται στην πάνω κατακόρυφη θέση, δηλαδή τέλεια αναποδογυρισμένος (σχ. 13.2α).

β) Το νερό πιέζει τον πυθμένα του κουβά κατ' αντίθετη φορά (**φυγόκεντρος δύναμη**).



Σχ. 13.2α.



Σχ. 13.2β.

Παράδειγμα 3.

Ας κάνουμε να περιστραφεί μια σφαίρα με τη βοήθεια της διατάξεως του σχήματος 13.2β.

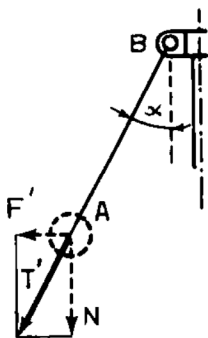
Όταν η ταχύτητα είναι σταθερή, το στέλεχος AB κλίνει με ορισμένη γωνία α ως προς την κατακόρυφο. Το κέντρο G της σφαίρας εκτελεί κύκλο κέντρου O και ακτίνας OA .

α) Το βάρος \vec{B} της σφαίρας και η έλξη T που δέχεται η σφαίρα στο σημείο A από το στέλεχος AB έχουν μια συνισταμένη κεντρομόλο δύναμη F που κρατά το κέντρο της σφαίρας στην κυκλική τροχιά.

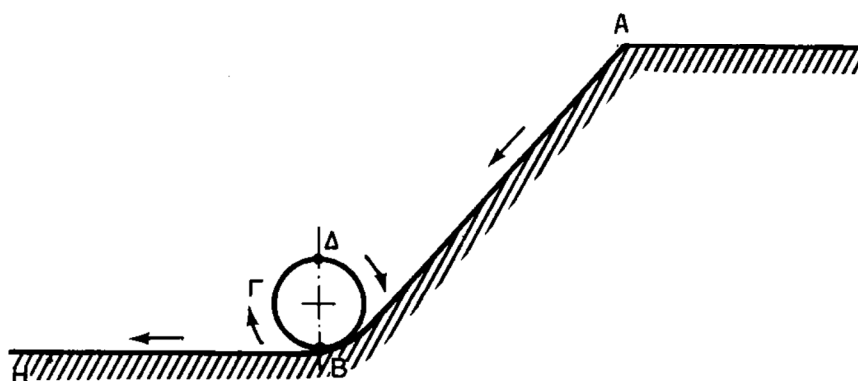
β) Η τάση T' , που ασκείται από την κινούμενη σφαίρα στο στέλεχος αναρτήσεως, είναι ίση και αντίθετη προς την T (σχ. 13.2γ) και αναλύεται σε μια κατακόρυφη συνιστώσα, ίση προς το B , και μια οριζόντια συνιστώσα F' ίση και αντίθετη της F . Η τελευταία αυτή συνιστώσα είναι η φυγόκεντρος δύναμη.

Και όπως συμβαίνει πάντοτε σχετικά με την δράση και αντίδραση, η κεντρομόλος δύναμη και η φυγόκεντρος δύναμη ενεργούν σε διαφορετικά σώματα.

Η κεντρομόλος δύναμη στο κινούμενο σώμα, ενώ η φυγόκεντρος στους οδηγούς ή στα στηρίγματα (εδώ στο άκρο του στελέχους AB).



Σχ. 13.2γ.



Σχ. 13.2δ.

Ανακεφαλαίωση.

1. Όταν ένα υλικό σημείο μάζας m διαγράφει κυκλική τροχιά με μια κίνηση ομοιόμορφη (περιφ. ταχύτητα $v = r \cdot \omega$) διεγείρεται από μια κεντρομόλο δύναμη η οποία το συγκρατεί στην τροχιά του. Η δύναμη αυτή έχει ως έκφραση:

$$F_k = m\omega^2 \cdot r$$

ή

$$F_k = \frac{mv^2}{r}$$

Στην κεντρομόλο δύναμη αντιστοιχεί μια κεντρομόλος επιτάχυνση:

$$\gamma_k = \omega^2 \cdot r$$

ή

$$\gamma_k = \frac{v^2}{r}$$

Στο Διεθνές σύστημα μονάδων (S.I.) το μέγεθος F πρέπει να εκφρασθεί σε N, το γ σε m/s^2 , το m σε kg, το r σε m, το v σε m/s, και το ω σε rd/s .

2. Γενίκευση: Όταν το Κ.Β. στερεού σώματος (μάζας M) διαγράφει κύκλο ακτίνας r , με σταθερή ταχύτητα, οι κεντρομόλες δυνάμεις που ενεργούν σε κάθε σημείο του συνθέτουν μια συνισταμένη που έχει μέγεθος:

$$F_k = M\omega^2 r$$

ή

$$F_k = M \cdot \frac{v^2}{r}$$

3. Η κεντρομόλος δύναμη ενεργεί στο κινούμενο σώμα. Βάσει της αρχής της δράσεως και αντιδράσεως, τα στοιχεία συνδέσεως που κρατούν το σώμα στην κυκλική τροχιά διεγείρονται από μια **φυγόκεντρο δύναμη** κατευθείαν αντίθετη στην κεντρομόλο δύναμη.
4. Αν το σώμα στρέφεται γύρω από έναν υλικό άξονα συμμετρίας, το Κ.Β. βρίσκεται στον άξονα αυτόν ($r=0$) η δε συνισταμένη των κεντρομόλων δυνάμεων είναι μηδενική, όπως ακριβώς και η συνισταμένη των φυγοκέντρων δυνάμεων.
5. Είναι ενδιαφέρον να σημειωθεί ότι:
 Όταν σώμα διεγείρεται από μίαν ομοιόμορφη κυκλική κίνηση, οι δυνάμεις που εφαρμόζονται σ' αυτό σχηματίζουν, με μια δύναμη ίση και αντίθετη προς την κεντρομόλο δύναμη, ένα σύστημα δυνάμεων σε ισορροπία.
 Η φυγόκεντρος δύναμη φέρεται ως μια δύναμη αδράνειας της περιστροφής.

13.3 Ασκήσεις.

- Χαλύβδινο σύρμα διατομής 1mm^2 σπάει με φορτίο 600N . Στερεώνομε στο ένα του άκρο μάζα 1kg και το περιστρέφουμε κυκλικά σε κατακόρυφο επίπεδο. Η ακτίνα του κύκλου που διαγράφεται από το κέντρο βάρους είναι $0,50\text{kg}$. Να υπολογισθούν: α) Η τάση του σύρματος όταν η ταχύτητα περιστροφής είναι 3στρ/s . β) Η ταχύτητα περιστροφής που πρέπει να σπάσει το σύρμα.
- Κινητήριο στρόφαλο έχει το Κ.Β. του σε απόσταση 160mm από τον άξονα περιστροφής. Ποια είναι η ένταση της δυνάμεως όταν η ταχύτητα περιστροφής είναι 120στρ/s , γνωρίζοντας ότι η μάζα του στρόφαλου είναι 15kg ;
- Σε ένα αυλάκι, που σχηματίζει μια μπούκλα, αφήνομε να κυλίσει σφαίρα από το υψηλότερο σημείο του. Όταν ξεκινάει σφαίρα από τόσο ψηλά βρίσκεται συνεχώς σε επαφή με την τροχιά. Έστω ότι: r η ακτίνα της μπούκλας, u η γραμμική ταχύτητα της σφαίρας στο ψηλότερο σημείο της μπούκλας, B το βάρος της σφαίρας, g η επιτάχυνση της βαρύτητας. Να δείξετε ότι η σχέση $u^2 > g \cdot r$ πρέπει να ισχύει για να μπορεί η σφαίρα να εφάπτεται στο αυλάκι στο σημείο D.
 Αριθμητική εφαρμογή: Αν $r=0,20\text{m}$ και $g=9,81\text{m/s}^2$, τότε $u=$;
- Να βρεθεί η τάση του σύρματος αναρτήσεως ανελκυστήρα μάζας 8t , όταν αυτός με τον κινητήρα του αποκτήσει σταθερή επιτάχυνση $1,2\text{m/s}^2$.
- Μοτοσυκλετιστής κινείται κυκλικά στο εσωτερικό κυρτής επιφάνειας ενός κάθετα τοποθετημένου κυλίνδρου ακτίνας 8m . Η συνισταμένη του βάρους και της φυγοκέντρου δυνάμεως πρέπει να σχηματίζει με το επίπεδο της τροχιάς το πολύ γωνία $\alpha=20^\circ$ γιατί σε μεγαλύτερες γωνίες γλιστρούν οι τροχοί.
 Ποια είναι η ελάχιστη τιμή της γραμμικής ταχύτητας;

Κεφάλαιο 5 Κεντρομόλος δύναμη που εκτελεί ομαλή και περιστροφική κίνηση γύρω από άξονα – φυγόκεντρος δύναμη στερεού

Όπως αναφέρθηκε, μετά από την παράθεση του 13^{ου} κεφαλαίου του βιβλίου, που αποτελεί και το κύριο εκπαιδευτικό υλικό για το μάθημα, ακολουθούν επεξηγήσεις, διασαφήνιση κάποιων πραγμάτων, επίλυση πρωτότυπων παραδειγμάτων για τα οποία δεν υπάρχουν, αλλά και επίλυση κάποιων των προς λύση ασκήσεων. Οι παρούσες σημειώσεις δεν έχουν σκοπό να αντικαταστήσουν το βιβλίο αυτό, το οποίο διδασκόταν για δεκαετίες, αλλά να συμπληρώσουν και να αποσαφηνίσουν κάποια πράγματα, καθώς και να επιλύσουν τις ασκήσεις λυμένες και άλυτες, και να προσθέσουν κάποια παραδείγματα για την καλύτερη κατανόηση της ύλης.

5.1 γενικά – κεντρομόλος δύναμη

Έστω ότι ένα σώμα εκτελεί ομαλή περιστροφική κίνηση γύρω από έναν άξονα. Κάθε σωματίδιο εκτελεί ομαλή περιστροφική κίνηση, και προκαλείται κεντρομόλος δύναμη, με διεύθυνση προς το κέντρο της περιφέρειας του κύκλου. Η συνισταμένη των κεντρομόλων δυνάμεων όλων των σωματιδίων, έχει την ίδια τιμή με το άθροισμα όλων αυτών, αν θεωρούσαμε ότι όλη η μάζα είναι συγκεντρωμένη το Κέντρο Βάρους του σώματος. Θεωρούμε ότι

ω	τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του σώματος
u	την περιφερειακή ταχύτητα του Κ.Β. (G) του σώματος
r	την απόσταση του Κ.Β. από τον άξονα περιστροφής ($u = \omega \cdot r$)
B	το βάρος και M την μάζα του στερεού ($B = M \cdot g$)
γ_{κ}	την κεντρομόλο επιτάχυνση του Κ.Β. (G) ($\gamma_{\kappa} = u^2/r = \omega^2 r$)
F_{κ}	την ένταση της κεντρομόλου δυνάμεως επί της μάζας M , που υποτίθεται συγκεντρωμένη στο Κ.Β. του σώματος
	$F_{\kappa} = M\omega^2 \cdot r$ $F_{\kappa} = M \cdot \frac{u^2}{r}$

Αν η ακτίνα είναι πολύ μεγάλη σε σχέση με τις διαστάσεις του σώματος που περιστρέφεται, δεχόμαστε ότι η κεντρομόλος δύναμη διέρχεται από το Κ.Β.

Αν το σώμα περιστρέφεται γύρω από έναν άξονα συμμετρίας, όπως σε έναν σφόνδυλο, τότε το Κ.Β. του βρίσκεται στον άξονα συμμετρίας, και ισχύει $r = 0$, $\omega^2 \cdot r = 0$, και $F = 0$

5.2 φυγόκεντρος δύναμη

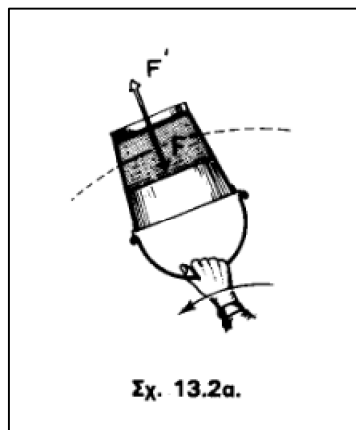
Σε κάθε δράση υπάρχει μια αντίδραση, οπότε στην κεντρομόλο δύναμη αντίδραση είναι η φυγόκεντρος δύναμη.

5.2.1 1η περίπτωση

Όταν μια σφαίρα εκσφενδονίζεται, το νήμα έλκει την σφαίρα προς τα μέσα, και η έλξη αυτή είναι η κεντρομόλος δύναμη. Με την δράση αντίδραση, η σφαίρα τραβάει το νήμα προς τα έξω, με δύναμη ίση και αντίθετη με την κεντρομόλο, που είναι η φυγόκεντρος δύναμη.

5.2.2 2η περίπτωση

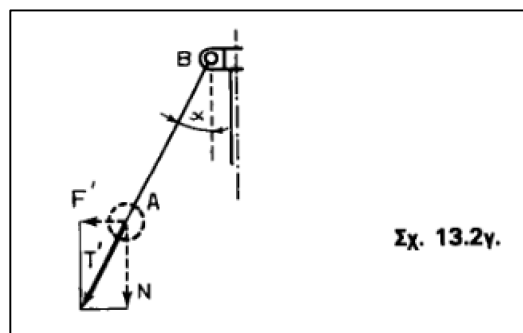
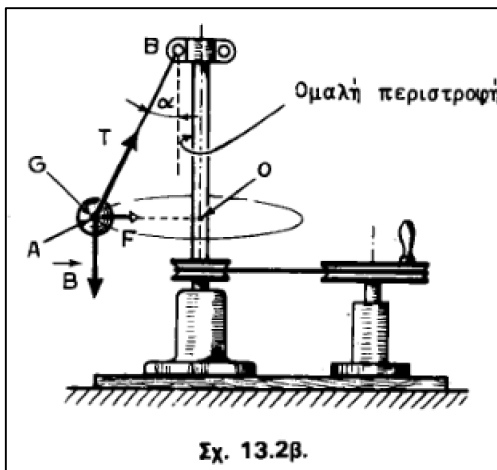
Έστω ότι ένας κουβάς με χερούλι περιέχει νερό, τον πιάνουμε και τον περιστρέφουμε γρήγορα σε κατακόρυφο επίπεδο. Το νερό τότε παραμένει στον πυθμένα του κουβά, ακόμα και αν βρίσκεται αναποδογυρισμένος σε κατακόρυφη θέση. Η κεντρομόλος δύναμη από το χέρι μας προκαλεί την κίνηση του κουβά, έλκοντας προς τα μέσα. Η φυγόκεντρος δύναμη, πιέζει τον πυθμένα του κουβά προς τα έξω.



Σχ. 13.2α.

5.2.3 3η περίπτωση

Με την διάταξη του επόμενου σχήματος, κάνουμε να περιστραφεί μια σφαίρα. Όταν η ταχύτητα της κυκλικής κίνησης είναι σταθερή, το στέλεχος AB αποκτάει κλίση γωνίας α προς την κατακόρυφο. Το Κ.Β. της σφαίρας (το G) διαγράφει κύκλο κέντρου O και ακτίνας OA.



Το βάρος B της σφαίρας και η έλξη T του νήματος, που δέχεται η σφαίρα, έχουν συνισταμένη την κεντρομόλο δύναμη F που διατηρεί το G στην κυκλική τροχιά. Η τάση T' που ασκείται από την σφαίρα προς το στέλεχος AB στο σημείο B , είναι ίση και αντίθετη με την τάση του νήματος T , αναλύεται α) σε μια οριζόντια συνιστώσα F' , που είναι ίση και αντίθετη με την F (κεντρομόλος) όπου η F' είναι η φυγόκεντρος δύναμη, και β) σε μια κατακόρυφη συνιστώσα N που είναι ίση με το βάρος της σφαίρας.

Η κεντρομόλος και η φυγόκεντρος δύναμη, είναι δράση και αντίδραση, και ενεργούν σε διαφορετικά σώματα, δηλαδή η κεντρομόλος στο κινούμενο σώμα, και η φυγόκεντρος στους οδηγούς ή στα στηρίγματα.

5.3 ανακεφαλαίωση

Παρατίθεται η ανακεφαλαίωση του κεφαλαίου 5, που αποτελεί το κεφάλαιο 13 του βιβλίου μηχανική του Ευγενιδείου ιδρύματος.

Ανακεφαλαίωση.

1. Όταν ένα υλικό σημείο μάζας m διαγράφει κυκλική τροχιά με μια κίνηση ομοιόμορφη (περιφ. ταχύτητα $u = r \cdot \omega$) διεγείρεται από μια κεντρομόλο δύναμη η οποία το συγκρατεί στην τροχιά του. Η δύναμη αυτή έχει ως έκφραση:

$F_k = m\omega^2 \cdot r$

ή

$F_k = \frac{mu^2}{r}$

Στην κεντρομόλο δύναμη αντιστοιχεί μια κεντρομόλος επιτάχυνση:

$\gamma_k = \omega^2 \cdot r$

ή

$\gamma_k = \frac{u^2}{r}$

Στο Διεθνές σύστημα μονάδων (S.I.) το μέγεθος F πρέπει να εκφρασθεί σε N , το γ σε m/s^2 , το m σε kg , το r σε m , το u σε m/s , και το ω σε rd/s .

2. Γενίκευση: Όταν το Κ.Β. στερεού σώματος (μάζας M) διαγράφει κύκλο ακτίνας r , με σταθερή ταχύτητα, οι κεντρομόλες δυνάμεις που ενεργούν σε κάθε σημείο του συνθέτουν μια συνισταμένη που έχει μέγεθος:

$F_k = M\omega^2 r$

ή

$F_k = M \cdot \frac{u^2}{r}$

3. Η κεντρομόλος δύναμη ενεργεί στο κινούμενο σώμα. Βάσει της αρχής της δράσεως και αντιδράσεως, τα στοιχεία συνδέσεως που κρατούν το σώμα στην κυκλική τροχιά διεγείρονται από μια **φυγόκεντρο δύναμη** κατευθείαν αντίθετη στην κεντρομόλο δύναμη.

4. Αν το σώμα στρέφεται γύρω από έναν υλικό άξονα συμμετρίας, το Κ.Β. βρίσκεται στον άξονα αυτόν ($r=0$) η δε συνισταμένη των κεντρομόλων δυνάμεων είναι μηδενική, όπως ακριβώς και η συνισταμένη των φυγοκέντρων δυνάμεων.
5. Είναι ενδιαφέρον να σημειωθεί ότι:
Όταν σώμα διεγείρεται από μίαν ομοιόμορφη κυκλική κίνηση, οι δυνάμεις που εφαρμόζονται σ' αυτό σχηματίζουν, με μια δύναμη ίση και αντίθετη προς την κεντρομόλο δύναμη, ένα σύστημα δυνάμεων σε ισορροπία.
Η φυγόκεντρος δύναμη φέρεται ως μια δύναμη αδράνειας της περιστροφής.

βιβλιογραφία κεφαλαίου

Γκρος Γ. & Λαζαρίδης Λ., (1985). *Μηχανική*. Αθήνα: Ίδρυμα Ευγενίδη