

## Παράρτημα 7. Κεφάλαιο 4<sup>ο</sup> «Μηχανική» Β' εξαμήνου ΔΙΕΚ, που ισοδυναμεί με το κεφάλαιο 12<sup>ο</sup> «Μηχανική» των κ.κ. Γκρος & Λαζαρίδη

Παρατίθενται τα περιεχόμενα του κεφαλαίου 12, του βιβλίου «Μηχανική» των κ.κ. Γκρος & Λαζαρίδη, εκδόσεων Ιδρύματος Ευγενίδη. Το ανωτέρω βιβλίο μπορεί να ανακτηθεί από εδώ

[https://www.eef.edu.gr/media/2200/e\\_f00019.pdf](https://www.eef.edu.gr/media/2200/e_f00019.pdf)

Τα περιεχόμενα του βιβλίου για το κεφάλαιο 12, που ισοδυναμεί με το κεφάλαιο 4ο, της ύλης μας, εκτός της παράγραφο 12.5 που δεν αναφέρεται στην ύλη του οδηγού σπουδών, είναι τα παρακάτω

<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΩΔΕΚΑΤΟ</b>	
<b>Είδη κινήσεων</b>	
<b>Β. Δυναμική του απόλυτα στερεού σώματος</b>	
12.1 Πτώση σώματος λόγω βαρύτητας .....	144
12.2 Κίνηση στερεού σε οριζόντιο επίπεδο .....	145
α) Πρώτη υπόθεση .....	145
β) Δεύτερη υπόθεση .....	146
12.3 Μάζα και αδράνεια σώματος .....	146
12.4 Δύναμη αδράνειας σώματος που έχει ευθύγραμμη ομαλή κίνηση .....	147
Πρώτη περίπτωση .....	147
Δεύτερη περίπτωση .....	148K
12.5 Ποσότητα κινήσεως σώματος το οποίο μετακινείται .....	149
Ανακεφαλαίωση .....	149
12.6 Ασκήσεις .....	149

Παρατηρούμε ότι υπάρχει ταύτιση της ύλης του οδηγού σπουδών με τα αντίστοιχα κεφάλαια του βιβλίου Μηχανική, του Ευγενιδείου Ιδρύματος.

Μετά από την παράθεση του βιβλίου, που αποτελεί και το κύριο εκπαιδευτικό υλικό για το μάθημα, θα ακολουθήσουν επεξηγήσεις, διασαφήνιση κάποιων πραγμάτων, επίλυση πρωτότυπων παραδειγμάτων για τα οποία δεν υπάρχουν, αλλά και επίλυση κάποιων των προς λύση ασκήσεων.

Παρατίθενται παρακάτω, αυτούσιο, το ανωτέρω αναφερόμενο 12<sup>ο</sup> κεφάλαιο του ανωτέρω βιβλίου «Μηχανική» των κ.κ. Γκρος & Λαζαρίδη, εκδόσεων Ιδρύματος Ευγενίδη.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΩΔΕΚΑΤΟ

### ΕΙΔΗ ΚΙΝΗΣΕΩΝ

#### Β' ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΟΥ ΑΠΟΛΥΤΑ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

Στα επόμενα, σαν στερεό σώμα θα θεωρούμε σύνολο υλικών σημείων με σταθερές αποστάσεις μεταξύ τους, που αποτελούν ένα ομοιογενές σύστημα.

##### 12.1 Πτώση σώματος λόγω βαρύτητας.

Τύπος  $B = M \cdot g$

Είναι γνωστό ότι εξαιτίας της βαρύτητας όλα τα σώματα, όταν αφήνονται να πέσουν ελεύθερα σε χώρο δίχως αέρα (κενό), πέφτουν κατακόρυφα με την ίδια επιτάχυνση.

Η επιτάχυνση αυτή έχει τιμή στις τεχνικές εφαρμογές  $9,81 \text{ m/s}^2$ . Μπορούμε όμως να παραδεχθούμε, κάνοντας λάθος 2%, ως τιμή του  $g$  την τιμή  $10 \text{ m/s}^2$  δηλαδή:

$$g = 10 \text{ m/s}^2$$

Ας εφαρμόσουμε σε ένα σώμα το θεμελιώδη νόμο:  $F = m\gamma$ .

Το σώμα, όπως είπαμε παραπάνω, θεωρείται ότι αποτελείται από μικρά σωματίδια με μάζες  $m_1, m_2, m_3, \dots$  τα οποία κατά την πτώση τους διεγείρονται από κατακόρυφες δυνάμεις που έχουν όλες κατεύθυνση προς τα κάτω.

$$F_1 = m_1g, \quad F_2 = m_2g, \quad F_3 = m_3g \dots$$

Μεταφερμένες όλες αυτές οι δυνάμεις στο Κ.Β. (κέντρο βάρους) του σώματος δίνουν μια **μοναδική συνισταμένη. Το βάρος  $B$  του σώματος:**

$$B = (m_1g + m_2g + m_3g + \dots) = g (m_1 + m_2 + m_3 + \dots)$$

$$B = M \cdot g$$

##### **Αριθμητική εφαρμογή.**

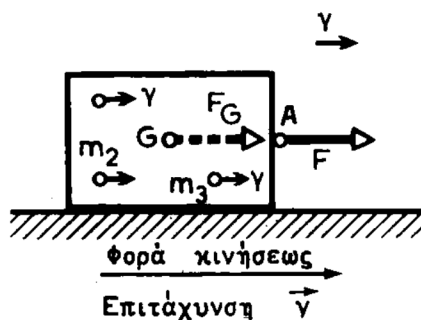
Έστω μάζα σώματος  $M = 20 \text{ kg}$  και επιτάχυνση βαρύτητας  $g = 10 \text{ m/s}^2$ . Τότε βάρος του σώματος:

$$B = 20 \times 10 = 200 \text{ N}$$

## 12.2 Κίνηση στερεού σε οριζόντιο επίπεδο.

Το στερεό λαμβάνεται σε σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Θεωρείται επίσης ως σώμα ομοιογενές και που διατηρεί ένα μετωπικό επίπεδο συμμετρίας, το επίπεδο της σελίδας, στο σημείο A του οποίου εφαρμόζεται η δύναμη F.

Η δύναμη αυτή είναι παράλληλη προς το οριζόντιο επίπεδο, στο οποίο εδράζεται το σώμα, ο δε άξονας ενέργειάς της διέρχεται από το Κ.Β. του σώματος (σχ. 12.2α).



Σχ. 12.2α.

Όταν το σώμα βρίσκεται σε κατάσταση ηρεμίας, το βάρος του B εξισορροπείται από το σύνολο των δυνάμεων επαφής, που ασκούνται στο σώμα από το επίπεδο εδράσεως.

### α) Πρώτη υπόθεση.

Δεν υπάρχει τριβή μεταξύ του σώματος και του επιπέδου εδράσεως.

Μόλις επιδράσει η δύναμη F, το σώμα αρχίζει να κινείται. Σε κάθε στιγμή όλα τα σωματίδια από τα οποία αποτελείται, και που έχουν μάζες  $m_1, m_2, m_3, \dots$  κλπ. έχουν την ίδια ταχύτητα  $u$  και την ίδια επιτάχυνση  $\gamma$ . Συμβαίνει συνεπώς σαν σε όλα τα σημεία χωριστά του σώματος να ήταν εφαρμοσμένες οι δυνάμεις  $m_1\gamma, m_2\gamma, m_3\gamma, \dots$  όλες παράλληλες προς το οριζόντιο επίπεδο (σχ. 12.2α).

Η αναγωγή όλων αυτών των δυνάμεων στο Κ.Β. του σώματος δίνει μια συνισταμένη δύναμη F που βρίσκεται στο επίπεδο συμμετρίας:

$$F = m_1\gamma + m_2\gamma + m_3\gamma + \dots = \gamma (m_1 + m_2 + m_3 + \dots) = M \cdot \gamma$$

όπου: M είναι η μάζα του σώματος.

Αφού η τριβή είναι μηδενική, τότε:

$$M \cdot \gamma = F$$

### Αριθμητική εφαρμογή.

Έστω μάζα  $M=20\text{kg}$ , δύναμη  $F=100\text{N}$  και  $\gamma = F : M = 5 \text{ m/s}^2$

Η κίνηση του σώματος είναι ευθύγραμμη και ομοιόμορφα επιταχυνόμενη.

Έτσι μπορούμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα που έχει το σώμα για κάθε στιγμή καθώς και το διάστημα που διανύει σ' αυτό το χρόνο. Μετά τέσσερα λοιπόν δευτερόλεπτα το σώμα θα έχει:

$$\text{ταχύτητα: } u = \gamma \cdot t = 5 \times 4 = 20 \text{ m/s}$$

$$\text{θα διανύσει δε διάστημα: } s = \frac{1}{2} \gamma t^2 = \frac{1}{2} \times 5 \times 16 = 40 \text{ m}$$

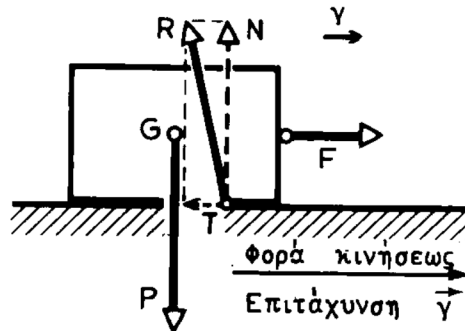
**β) Δεύτερη υπόθεση.**

Λαμβάνεται τώρα υπόψη η **τριβή ολισθήσεως** μεταξύ σώματος και επιπέδου (σχ. 12.2β).

Στην περίπτωση αυτή η επίδραση του οριζόντιου επιπέδου στο σώμα εκδηλώνεται με μια συνισταμένη δύναμη που αναλύεται σε:

— Μια συνιστώσα  $N$  κάθετη στο επίπεδο, συνεπώς παράλληλη προς τη  $B$ , με ίση προς αυτήν ένταση, αλλά αντίθετη φορά και

— Μια συνιστώσα επαπτομένη  $T$  με μικρότερη ένταση από την  $N$  και με φορά **αντίθετη** πάντα προς τη φορά κινήσεως.



Σχ. 12.2β.

Έστω  $F$  η εφαρμοζόμενη στο σώμα δύναμη. Η έντασή της πρέπει να είναι μεγαλύτερη από εκείνη της  $T$ .

Η θεμελιώδης εξίσωση τότε γράφεται ως εξής:

$$M \cdot \gamma = F - T$$

**Αριθμητική εφαρμογή.**

$$M = 20\text{kg}, \quad F = 100\text{N} \quad \text{καί} \quad T = 40\text{N}$$

Η επιτάχυνση  $\gamma$  έχει τότε τιμή:

$$\gamma = \frac{100 - 40}{20} = 3\text{m/s}^2$$

Η κίνηση του σώματος είναι πάλι ευθύγραμμη και ομαλά επιταχυνόμενη.

**12.3 Μάζα και αδράνεια σώματος.**

Η αρχή της αδράνειας που είδαμε να εφαρμόζεται στο υλικό σημείο, εφαρμόζεται και σε κάθε στερεό σώμα.

Ας κάνουμε το ακόλουθο πείραμα.

Κατά μήκος του εργαστηρίου ενός μηχανουργείου στερεώνονται δυο μεταλλικές γωνιές, ως παράλληλες τροχιές, στις οποίες στηρίζονται οι 4 τροχοί ενός φορείου. Το φορείο από τη μια του πλευρά φέρει λαβή, από την οποία μπορεί κανείς ή να το σπρώξει ή να το σταματήσει όταν κινείται, ή ακόμη να το χειρισθεί κατά μήκος των τροχιών.

Στα δύο άκρα των τροχιών υπάρχουν ελατηριωτά πέρατα.

Έστω ότι το φορείο έχει μάζα 20 kg. Τοποθετείται πρώτα στο ένα άκρο των τροχιών. Έπειτα το ωθούμε απότομα από τα αριστερά προς τα δεξιά. Με την ώθηση που του δώσαμε αρχίζει να κινείται. Παρατηρούμε όμως ότι κατά την ώθηση αντιμετωπίζουμε κάποια αντίδραση του σώματος στην κίνηση αυτή και μάλιστα η αντίδραση αυτή είναι τόσο μεγαλύτερη όσο η κίνηση που θέλουμε να του μεταδώσουμε είναι ταχύτερη. **Η μάζα λοιπόν του φορείου ανθίσταται στην επιτάχυνση.** Παράλληλα αν, όταν το φορείο βρίσκεται σε κίνηση, προσπαθήσουμε να το σταματήσουμε απότομα, τραβώντας το από τη λαβή αντίθετα από την κίνησή του, θα συναντήσουμε πάλι αντίσταση που θα μας γίνει αντιληπτή από τη μυική κόπωση που θα αισθανθούμε. Συνεπώς η **μάζα του φορείου ανθίσταται και στην επιβράδυνση.**

Αν επαναλάβουμε το πείραμα κατά τρόπο που να προκαλούμε μια κίνηση πήγαινε-έλα στο φορείο τόσο γρήγορη, όσο μας το επιτρέπουν οι δυνάμεις μας το συμπέρασμα βγαίνει μόνο του.

**Η μάζα του σώματος αντιδρά στην επιτάχυνση, δηλαδή σε κάθε μεταβολή της ταχύτητάς του.**

Ας πάρουμε κι άλλο παράδειγμα:

Μια αμαξοστοιχία π.χ. με μεγάλο αριθμό βαγονιών. Αν το τρένο είναι σημαντικά βαρύ (700-800 τόννοι) ξεκινάει σιγά. Αν είναι ελαφρύ ξεκινάει γρήγορα.

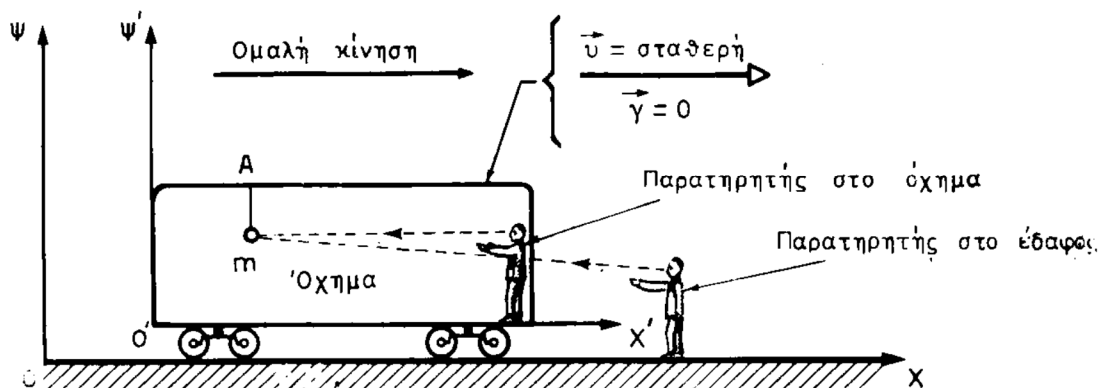
Όσο λοιπόν πιο μεγάλη είναι η μάζα του σώματος τόσο περισσότερο ανθίσταται στην αλλαγή της ταχύτητας ή, με άλλα λόγια, τόσο πιο μεγάλη είναι η αδράνειά του.

**Η μάζα ενός σώματος χαρακτηρίζει την αδράνειά του.**

## 12.4 Δύναμη αδράνειας σώματος που έχει ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.

Σε σιδηροδρομικό όχημα που κυλάει σε ευθύγραμμη και οριζόντια τροχιά αναρτάται από την οροφή του με νήμα χαλύβδινη σφαίρα μάζας  $m$ .

— **Πρώτη περίπτωση:** Όταν η κίνηση του βαγονιού είναι ομαλή, τότε **το νήμα αναρτήσεως παραμένει κατακόρυφο**, γεγονός που διαπιστώνεται από δυο παρατηρητές, που ο ένας είναι μέσα στο βαγόνι και ο άλλος έξω απ' το βαγόνι (έδαφος) (σχ. 12.4α).

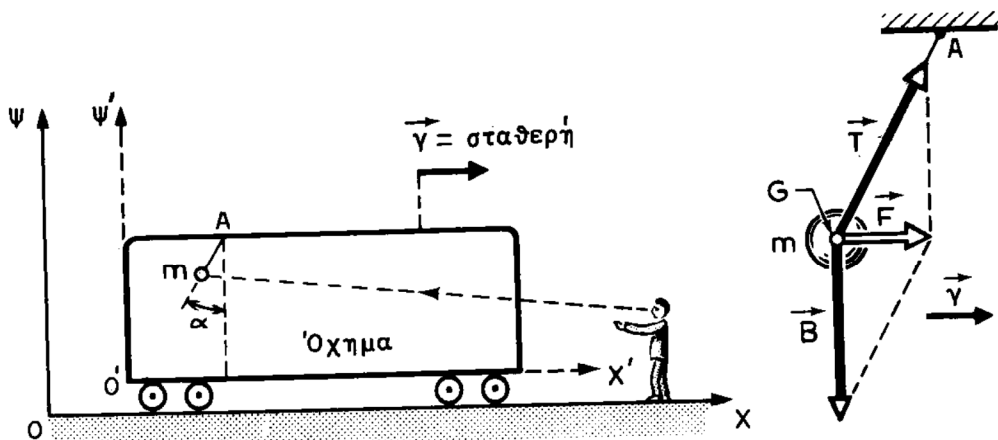


Σχ. 12.4α.

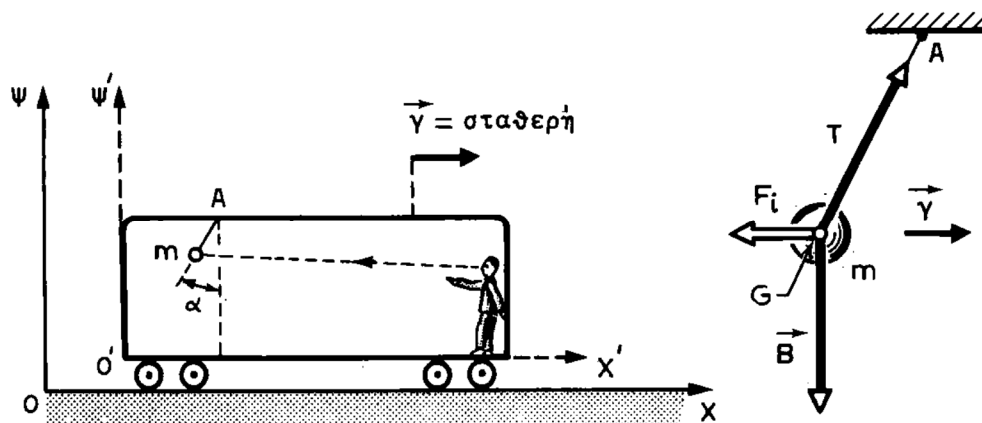
— **Δεύτερη περίπτωση:** Όταν το όχημα αποκτά αιφνίδια κίνηση ομαλά επιταχυνόμενη ( $\gamma = \text{σταθ.}$ ), τότε **το νήμα κλίνει αντίθετα προς την κίνηση** και παίρνει μια κατάλληλη θέση ισορροπίας με γωνία  $\alpha$  ως προς την κατακόρυφο, πράγμα που το διαπιστώνουν και οι δυο παρατηρητές (σχ. 12.4β και σχ. 12.4γ). Πώς εξηγείται το φαινόμενο αυτό;

**α) Από τον παρατηρητή που είναι στο έδαφος:**

Γι' αυτόν, ως προς τους σταθερούς άξονας  $OX$ ,  $O\Psi$  που συνδέονται με τη  $\Gamma\eta$ , η κίνηση της σφαίρας είναι γραμμική οριζόντια με επιτάχυνση  $\gamma$  (σχ. 12.4β). Η σφαίρα διεγείρεται από μια δύναμη  $F$  που υπολογίζεται από την εξίσωση  $F = m \cdot \gamma$ . Η δύναμη αυτή  $F$  είναι η συνισταμένη δύο δυνάμεων: Του βάρους της σφαίρας ( $B = m \cdot g$ ) και της δράσεως του νήματος (που το βαγόνι το τραβάει από το σημείο  $A$ ) επάνω στη σφαίρα.



Σχ. 12.4β.



Σχ. 12.4γ.

**β) Από τον παρατηρητή που είναι στο βαγόνι.**

Γι' αυτόν τον παρατηρητή — που συναισθάνεται πολύ καλά τα ψυχολογικά αποτελέσματα της επιτάχυνσης — η σφαίρα και το κορδόνι αναρτήσεώς της είναι ακίνητα ως προς το βαγόνι (σχ. 12.4γ). Ο παρατηρητής αυτός σκέπτεται με τον ακόλουθο τρόπο: Η σφαίρα ισορροπεί ως προς το βαγόνι υπό την επίδραση 3 δυνάμεων: του βάρους της  $B$ , της τάσεως  $T$  του νήματος αναρτήσεώς της από το

βαγόνι και μιας τρίτης δυνάμεως  $F_i$  αναγκαστικά αντίθετης προς την συνισταμένη των δύο άλλων.

Η αντιπαράβολή των συλλογισμών οδηγεί στο να παραδεχθούμε πως η  $F_i$  είναι αντίθετη της  $F$ :

$$F_i = -F = -m \cdot \gamma$$

Η  $F_i$  καλείται δύναμη αδράνειας της σφαίρας στην επιταχυνόμενη κίνηση.

## 12.5 Ποσότητα κινήσεως σώματος το οποίο μετακινείται.

Εξ ορισμού η ποσότητα κινήσεως υλικού σημείου μάζας  $m$  και ταχύτητας  $\vec{u}$  σε δοσμένη στιγμή δίνεται από το γινόμενο  $m \cdot \vec{u}$  (μέγεθος διανυσματικό).

Για ένα σώμα μάζας  $M$  του οποίου όλα τα σημεία σε κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή έχουν την ίδια ταχύτητα  $\vec{u}$  η ποσότητα κινήσεως ισούται με  $M \cdot \vec{u}$ .

### Σημείωση.

Όταν στον τύπο  $F = m \cdot \gamma$  η επιτάχυνση είναι μηδέν η ταχύτητα  $u$  είναι σταθερή ή μηδέν. Από αυτό προκύπτει ότι αν ένα σώμα κινείται ομαλά, το γινόμενο της μάζας του επί την ταχύτητά του είναι σταθερό.

$$M \cdot u = \text{σταθ.}$$

### Ανακεφαλαίωση.

1. Ο θεμελιώδης νόμος της δυναμικής όταν εφαρμόζεται σε στερεό μάζας  $M$  που αφήνεται σε ελεύθερη πτώση στο κενό οδηγεί στη σχέση:

$$B = M \cdot g$$

2. Ένα σώμα με μάζα  $M$ , όταν θεωρείται ότι το βάρος του εξισορροπείται από τις ανταγωνιστικές δυνάμεις της βαρύτητας, υπό την επίδραση μιας δυνάμεως  $F$ , αποκτά μian επιτάχυνση  $\gamma$  της αυτής διεύθυνσεως και της αυτής φοράς με τη δύναμη και την ένταση που δίνεται από τον τύπο:

$$\vec{F} = M \cdot \vec{\gamma}$$

3. Η μάζα ενός σώματος χαρακτηρίζει την αδράνειά του, δηλαδή την αντίστασή του σε κάθε μεταβολή της ταχύτητάς του.

4. Η δύναμη αδράνειας ενός υλικού σημείου μάζας  $m$  που εκτελεί μια κίνηση ομαλώς επιταχυνόμενη με μian επιτάχυνση  $\gamma$  μπορεί να παρασταθεί με ένα διάνυσμα  $-m\vec{\gamma}$  αντίθετης φοράς προς την επιτάχυνση. Η δύναμη αυτή εξαφανίζεται αμέσως όταν  $F=0$ , δηλαδή όταν η κίνηση μεταπέσει σε ομαλή.

## 12.6 Ασκήσεις.

1. Αυτοκίνητο μάζας 1000 kg είναι σταματημένο σε οριζόντιο δρόμο. Στο ξεκίνημα όλα συμβαίνουν ωσάν να εφαρμόζεται δύναμη 500 N. α) Τι επιτάχυνση αποκτά το όχημα; β) Ποια είναι η ταχύτητά του 5 δευτερόλεπτα μετά από την εκκίνησή του;

2. Ποια είναι η ελκτική δύναμη μιας ατμομηχανής που είναι συνδεδεμένη με τραίνο μάζας 200 t που, ξεκινώντας από την ηρεμία, σε διάστημα 200 δευτερολέπτων κάνει ώστε να αποκτήσει το τραίνο ταχύτητα 70 km/h. ( $g = 10\text{m/s}^2$ ).
3. Σε κεκλιμένο επίπεδο και κατά μήκος της ευθείας με τη μεγαλύτερη κλίση, ρίχνουμε μια σφαίρα από το κάτω μέρος προς τα επάνω. Αναλύστε τις δυνάμεις που ενεργούν πάνω στη σφαίρα σε μια δεδομένη στιγμή της προς τα επάνω κινήσεώς της. Αποδείξτε ότι δέχεται μια συνισταμένη δύναμη σταθερή και παράλληλη προς το επίπεδο. Παραδεχόμαστε πως η προς τα επάνω κίνηση της σφαίρας είναι ομαλά επιβραδυνόμενη.
4. Αυτοκίνητο έχει μάζα 8t. Τρέχοντας με ταχύτητα 50km/h μπορεί και σταματάει σε απόσταση 13,5 m άμα φρενάρει δυνατά. Με την προϋπόθεση πως η κίνηση είναι ομαλά επιβραδυνόμενη να υπολογισθούν: α) Η επιβράδυνση  $\gamma$ . β) Η δύναμη  $F$ , σε N, που μπορεί ν' αντικαταστήσει τα φρένα του αυτοκινήτου.





## Κεφάλαιο 4 Είδη κινήσεων

Όπως αναφέρθηκε, μετά από την παράθεση του 12<sup>ου</sup> κεφαλαίου του βιβλίου, που αποτελεί και το κύριο εκπαιδευτικό υλικό για το μάθημα, ακολουθούν επεξηγήσεις, διασαφήνιση κάποιων πραγμάτων, επίλυση πρωτότυπων παραδειγμάτων για τα οποία δεν υπάρχουν, αλλά και επίλυση κάποιων των προς λύση ασκήσεων. Οι παρούσες σημειώσεις δεν έχουν σκοπό να αντικαταστήσουν το βιβλίο αυτό, το οποίο διδασκόταν για δεκαετίες, αλλά να συμπληρώσουν και να αποσαφηνίσουν κάποια πράγματα, καθώς και να επιλύσουν τις ασκήσεις λυμένες και άλυτες, και να προσθέσουν κάποια παραδείγματα για την καλύτερη κατανόηση της ύλης.

### 4.1 δυναμική του απόλυτα στερεού σώματος

Στις επόμενες παραγράφους, ως στερεό σώμα, θεωρούμε ένα σύνολο υλικών σημείων, που έχουν σταθερές αποστάσεις μεταξύ τους, και αποτελούν ένα ομοιογενές σύστημα.

### 4.2 πτώση σώματος λόγω βαρύτητας

Το βάρος σώματος είναι  $B = m \cdot g$ . Εξαιτίας της βαρύτητας τα σώματα, όταν αφεθούν να πέσουν ελεύθερα στο κενό σε χώρο χωρίς αέρα, πέφτουν κατακόρυφα με ίδια επιτάχυνση, την επιτάχυνση της βαρύτητας. Στον αέρα είναι ελάχιστα διαφορετικά λόγω αντίστασης του αέρα. Η επιτάχυνση της βαρύτητας έχει τιμή  $9,81 \text{ m/s}^2$ . Δεχόμαστε με σφάλμα 2 % ότι είναι ίσο με  $g = 10 \text{ m/s}^2$ , και εφαρμόζουμε το 2<sup>ο</sup> αξίωμα, την θεμελιώδη εξίσωση, που είναι  $F = m \cdot \gamma$ .

Το σώμα αποτελείται από πολλά μικρά σωματίδια, με μάζες  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , τα οποία κατά την πτώση τους έλκονται από κατακόρυφες δυνάμεις βάρους που έχουν κατεύθυνση προς τα κάτω,  $F_1 = m_1 \cdot g, F_2 = m_2 \cdot g \dots F_n = m_n \cdot g$ . Αυτές οι δυνάμεις του κάθε σωματιδίου, μεταφέρονται στο κέντρο βάρους, και δίνουν 1 συνισταμένη, που είναι το βάρος του σώματος.

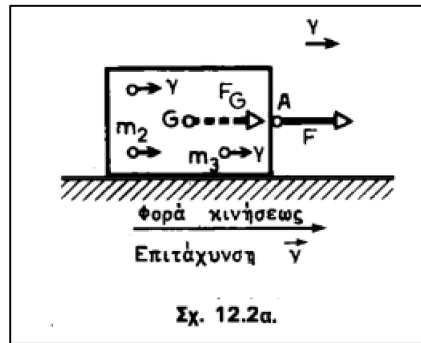
$$B = (m_1g + m_2g + m_3g + \dots) = g (m_1 + m_2 + m_3 + \dots)$$
$$B = M \cdot g$$

#### Παράδειγμα

Αν η μάζα είναι  $m = 20 \text{ kg}$ , και επιτάχυνση της βαρύτητας  $g = 10 \text{ m/s}^2$ , τότε το βάρος είναι  $20 \cdot 10 = 200 \text{ N}$  (newton)

### 4.3 κίνηση στερεού σε οριζόντιο επίπεδο

Θεωρούμε ένα στερεό σώμα που έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου, ότι είναι ομογενές, ότι έχει ένα μετωπικό επίπεδο συμμετρίας που είναι το επίπεδο της σελίδας, και ότι στο σημείο A εφαρμόζεται μια δύναμη F. Η δύναμη είναι παράλληλη στο οριζόντιο επίπεδο, το σώμα εδράζεται στο οριζόντιο επίπεδο, ο άξονας της δύναμης διέρχεται από το Κέντρο βάρους του σώματος.



Όταν το σώμα είναι σε κατάσταση ηρεμίας, το βάρος του εξισορροπεί με το σύνολο των δυνάμεων επαφής, που ασκούνται από το επίπεδο έδρασης προς το σώμα. Εξετάζουμε τις 2 υποθέσεις, α) χωρίς τριβή, και β) με τριβή.

### 4.3.1 1η υπόθεση, κίνηση χωρίς τριβή

Εάν δεν υπάρχει τριβή μεταξύ σώματος και επιπέδου, όταν αρχίζει να επιδρά η δύναμη  $F$ , το σώμα αρχίζει να κινείται. Όλα τα σωματίδια του έχουν μάζες  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , έχουν ίδια ταχύτητα και επιτάχυνση. Είναι σαν να υπάρχουν δυνάμεις  $m_1 \cdot \gamma, m_2 \cdot \gamma$ , κτλ όλες παράλληλες στο οριζόντιο επίπεδο. Η μεταφορά όλων αυτών των δυνάμεων στο Κ.Β. του σώματος, δίνει την συνισταμένη  $F$  που διέρχεται από το επίπεδο συμμετρίας

$$F = m_1\gamma + m_2\gamma + m_3\gamma + \dots = \gamma (m_1 + m_2 + m_3 + \dots) = M \cdot \gamma$$

όπου:  $M$  είναι η μάζα του σώματος.  
Αφού η τριβή είναι μηδενική, τότε:

$$M \cdot \gamma = F$$

#### Παράδειγμα

Αν η μάζα είναι  $m = 20 \text{ kg}$ , δύναμη  $F = 100 \text{ N}$ , πόσο διάστημα θα έχει διανύσει σε  $4 \text{ sec}$  ?

Απάντηση:  $F = m \cdot \gamma \Rightarrow \gamma = F / m = 100 / 20 = 5 \text{ m/s}^2$

Κίνηση ευθύγραμμη και ομαλά επιταχυνόμενη

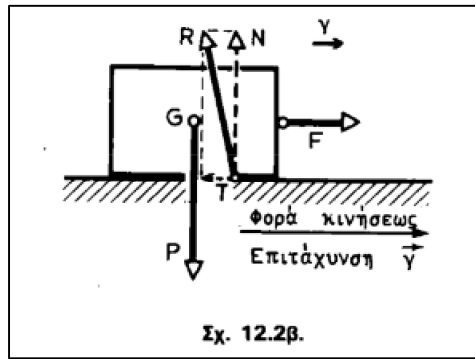
Ταχύτητα  $v = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot t = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 = 10 \text{ m/s}$

$S = v \cdot t = 10 \cdot 4 = 40$

Έλεγχος:  $S = v \cdot t = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4^2 = 40$

### 4.3.2 2η υπόθεση, κίνηση με τριβή

Εάν υπάρχει τριβή μεταξύ σώματος και επιπέδου, όταν αρχίζει να δρα η  $F$ , το σώμα αρχίζει να κινείται, αλλά επιδράει ταυτόχρονα η τριβή μεταξύ σώματος και επιπέδου. Η αντίδραση του επιπέδου λόγω τριβής, αναλύεται σε 2 συνιστώσες, α) μία  $N$  συνιστώσα κάθετη στο επίπεδο, ίση σε μέτρο και αντίθετη σε φορά με το βάρος  $B$ , και β) μια  $T$  συνιστώσα εφαπτομένη στο επίπεδο, με μικρότερη ένταση από την  $N$ , και με φορά αντίθετη στην φορά της κίνησης.



Η δύναμη  $F$  πρέπει να είναι μεγαλύτερη από την δύναμη  $T$  για να μπορέσει να κινηθεί το σώμα. Ισχύει  $\Sigma F = m \cdot \gamma \Rightarrow F - T = m \cdot \gamma$ .

#### Παράδειγμα

Αν η μάζα είναι  $m = 20 \text{ kg}$ , δύναμη  $F = 100 \text{ N}$ , και  $T = 40 \text{ N}$ , πόσο διάστημα θα έχει διανύσει σε  $4 \text{ sec}$  ?

Απάντηση:  $\Sigma F = m \cdot \gamma \Rightarrow \gamma = \Sigma F / m = (100 - 40) / 20 = 3 \text{ m/s}^2$

Κίνηση ευθύγραμμη και ομαλά επιταχυνόμενη

Ταχύτητα  $v = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot t = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6 \text{ m/s}$

$S = v \cdot t = 6 \cdot 4 = 24$

Έλεγχος:  $S = v \cdot t = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4^2 = 24$

## 4.4 μάζα και αδράνεια σώματος

Η αρχή της αδράνειας, εφαρμόζεται στο υλικό σημείο, και εφαρμόζεται και στο στερεό σώμα.

Στο βιβλίο υπάρχει ένα παράδειγμα, χωρίς σχήμα, για ένα φορείο με 4 τροχούς, όπου το φορείο έχει λαβή που μπορεί να τραβηχτεί από εκεί, να σπρωχτεί, ή να το σταματήσει. Το φορείο κινείται σε σιδηροτροχιές. Με την ώθηση που δίνουμε στο φορείο για να κινηθεί, παρατηρούμε ότι δεχόμαστε αντίδραση στο ξεκίνημα της κίνησης, η οποία αντίδραση είναι τόσο μεγαλύτερη όσο μεγαλύτερη κίνηση θέλουμε να το δώσουμε. Η μάζα του φορείου, λόγω αδράνειας, αντιστέκεται στην κίνηση.

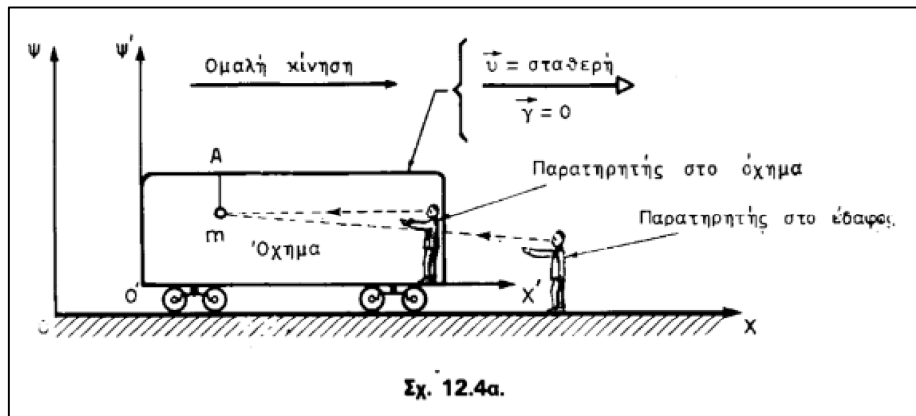
Παρομοίως γίνεται όταν θέλουμε να το σταματήσουμε, είτε τραβώντας από την λαβή με φορά αντίθετη της κίνησης, είναι από μπροστά προσπαθώντας να το σταματήσουμε. Παρατηρούμε επίσης από την μάζα, λόγω αδράνειας, μια αντίσταση στην μετακίνηση.

Άρα η μάζα του σώματος αντιστέκεται στην επιτάχυνση, σε κάθε δηλαδή μεταβολή της ταχύτητας. Παράδειγμα είναι το ξεκίνημα ενός τρένου, που όσο πιο βαρύ είναι, τόσο πιο αργά ξεκινάει, ενώ αν είναι ελαφρύ ξεκινάει πιο γρήγορα. Η μάζα του σώματος χαρακτηρίζει την αδράνεια του σώματος.

## 4.5 δύναμη αδράνειας σώματος που έχει μεταφορική κίνηση

Θεωρούμε ότι έχουμε σιδηροδρομικό όχημα που κυλάει σε ευθύγραμμη και οριζόντια τροχιά, και κρέμεται στην οροφή του χαλύβδινη σφαίρα μάζας  $m$ .

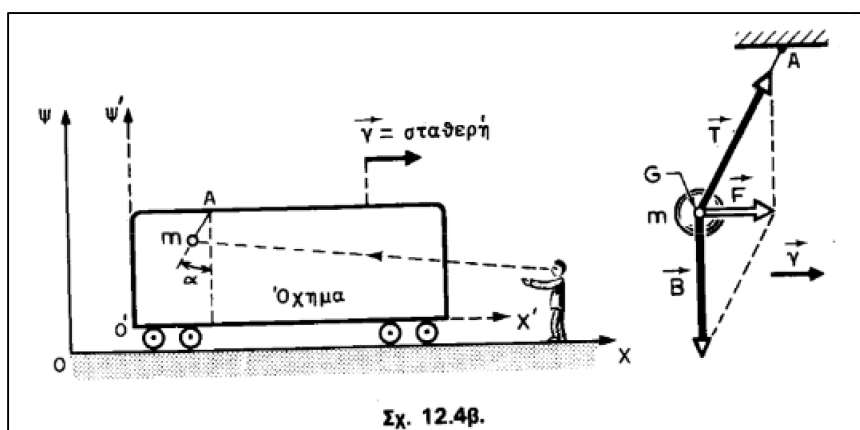
Στην 1<sup>η</sup> περίπτωση έχουμε ομαλή κίνηση του βαγονιού, και το νήμα παραμένει κατακόρυφο, κάτι που διαπιστώνεται από τους 2 παρατηρητές, ο ένας βρίσκεται μέσα στο βαγόνι, και ο άλλος έξω στο έδαφος.



Στην 2<sup>η</sup> περίπτωση, το όχημα κινείται ξαφνικά και κάνει ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, με  $\gamma = \text{σταθ}$ , και το νήμα αποκτάει κλίση αντίθετη στην κίνηση, και αποκτάει θέση ισορροπίας με γωνία  $\alpha$  προς την κατακόρυφο, κάτι που το διαπιστώνουν και οι 2 παρατηρητές. Η εξήγηση γίνεται παρακάτω

### 4.5.1 1<sup>η</sup> περίπτωση, παρατηρητής στο έδαφος

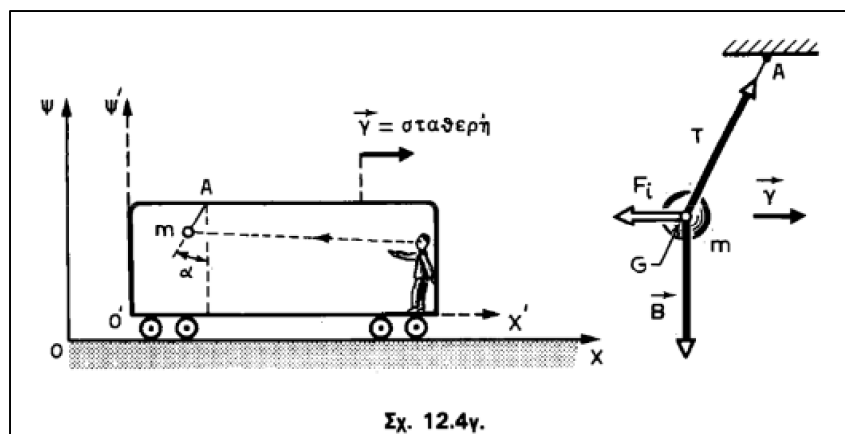
Για τον παρατηρητή στο έδαφος, η σφαίρα κάνει γραμμική οριζόντια κίνηση με επιτάχυνση  $\gamma$ , ως προς τους σταθερούς άξονες  $Ox$  και  $O\psi$  που συνδέονται με την  $\Gamma\eta$ .



Στην σφαίρα επιδρά η δύναμη  $F$  που υπολογίζεται από την εξίσωση  $\Sigma F = m \cdot \gamma$ , όπου η συνισταμένη  $F$  αποτελείται από το βάρος της σφαίρας  $B = m \cdot g$ , και από την τάση του νήματος, από το βαγόνι, όπου κρέμεται η σφαίρα στο σημείο  $A$ .

## 4.5.2 2η περίπτωση, παρατηρητής στο βαγόνι

Για τον παρατηρητή στο βαγόνι, η σφαίρα και το κορδόνι ανάρτησης της, είναι ακίνητα ως προς το βαγόνι.



Ο παρατηρητής αυτός, αισθάνεται τα ψυχολογικά αποτελέσματα της επιτάχυνσης, και σκέφτεται με τον εξής τρόπο: η σφαίρα ισορροπεί ως προς το βαγόνι με την επίδραση 3 δυνάμεων, του βάρους της σφαίρας, της τάσης του νήματος, και μιας 3<sup>ης</sup> δύναμης, αντίθετης στην συνισταμένη των άλλων 2 δυνάμεων που είναι η  $F_i$ . Η δύναμη  $F_i$  είναι ίση και αντίθετη με την  $F$ , ισχύει  $F_i = -F = -m \cdot \gamma$ . Αυτή η δύναμη λέγεται δύναμη αδράνειας της σφαίρας στην επιταχυνόμενη κίνηση του βαγονιού.

## 4.6 ανακεφαλαίωση

Παρατίθεται η ανακεφαλαίωση του κεφαλαίου 4, που αποτελεί το κεφάλαιο 12 του βιβλίου μηχανική του Ευγενιδείου ιδρύματος

### **Ανακεφαλαίωση.**

1. Ο θεμελιώδης νόμος της δυναμικής όταν εφαρμόζεται σε στερεό μάζας  $M$  που αφήνεται σε ελεύθερη πτώση στο κενό οδηγεί στη σχέση:

$$B = M \cdot g$$

2. Ένα σώμα με μάζα  $M$ , όταν θεωρείται ότι το βάρος του εξισορροπείται από τις ανταγωνιστικές δυνάμεις της βαρύτητας, υπό την επίδραση μιας δύναμews  $F$ , αποκτά μια επιτάχυνση  $\gamma$  της αυτής διεύθυνσεως και της αυτής φοράς με τη δύναμη και την ένταση που δίνεται από τον τύπο:

$$\vec{F} = M \cdot \vec{\gamma}$$

3. Η μάζα ενός σώματος χαρακτηρίζει την αδράνειά του, δηλαδή την αντίστασή του σε κάθε μεταβολή της ταχύτητάς του.
4. Η δύναμη αδράνειας ενός υλικού σημείου μάζας  $m$  που εκτελεί μια κίνηση ομαλώς επιταχυνόμενη με μian επιτάχυνση  $\gamma$  μπορεί να παρασταθεί με ένα διάνυσμα  $-m\vec{\gamma}$  αντίθετης φοράς προς την επιτάχυνση. Η δύναμη αυτή εξαφανίζεται αμέσως όταν  $F=0$ , δηλαδή όταν η κίνηση μεταπέσει σε ομαλή.

**βιβλιογραφία κεφαλαίου, και όλων των προηγούμενων κεφαλαίων**

Γκρος Γ. & Λαζαρίδης Λ., (1985). *Μηχανική*. Αθήνα: Ίδρυμα Ευγενίδη